Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан

Ташкентский государственный экономический университет

Д.М.Расулев

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

(учебное пособие)

ТАШКЕНТ - 2005

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие подготовлено в рамках проекта **ТАСИС-ТЕМПУС CD-JEP-23030-2002**, основой для которого послужила лекция, подготовленная департаментом экономики Массачусетского технологического института. Материал рекомендуется для магистрантов, аспирантов и преподавателей эконометрики. Структура пособия состоит из 3 глав, в которых излагаемый материал подкрепляется иллюстрациями и графиками. Глоссарий и список использованной литературы завершают учебное пособие.

Материал, в целом, соответствует, по оценкам экспертов, оригиналу, но в то же время метод и язык изложения требует доработки. Исходя из того, что терминология всегда отстает от технического прогресса (в начале люди приобретают колесо, а затем его уже называют), нам пришлось столкнутся с некоторыми сложностями при переводе английских (американских) выражений на русский язык. Стремясь сохранить смысл, мы перевели «market clearing» как «уровновешивание рынка», но оно по содержанию соответствует уровновешиванию рынка. Рассказывать о новинках не используя новые слова, невозможно, а неудачные просто непреживаются. Например, на заре авиации использовались такие термины, как авиатор, аэроплан. Сегодня они вытяснены такими названиями, как летчик, самолет.

Автор с благодарностью готов принять критику, замечания, пожелания коллег, слушателей и в течение пилотного курса довести материал до совершенства и насытить примерами более широкого масштаба.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ И ФАКТЫ РОСТА

1.1. Введение

•В 2000 году внутренний валовый продукт на душу населения в Соединенных Штатах составила 32500 $ США (по ценам 1995). Уровень этого дохода отражает высокий уровень жизни в стране. Как показала практика уровень этого показателя значительно ниже в большинстве других стран: например, в Мексике - 9000 $, в Китае – 4000 $, в Индии – 2500 $, а в Нигерии всего 1000 $ (цифры приведены к равной покупательской способности $ США) (табл. 1). Отсюда напрашивается вопрос:

Таблица 1

Международные различии в уровни жизни, 1992 г.

Страны	Доход на душу населения, в долл. США
США	$ 23571
Япония	19840
Западная Германия	19320
Советский Союз (1989)	10168
Мексика	8213
Бразилия	5099
Индонезия	2761
Бангладеш	1983
Китай	1961
Пакистан	1881
Индия	1683
Нигерия	1285

Источник: Robert Summers and Alan Heston, Supplement (Mark 5.6) to "The Penn World Table (Mark 5): An expanded Set of International Comparisons 1950-1988," Quarterly Journal of Economics (May 1991): 327-368.

•Когда страны с низким темпом дохода ВВП на душу населения смогут достичь уровня США или стран большой семерки? Согласно расчетам это станет возможным.

•Только при условии высоких темпов роста их экономики в течение длительного периода времени.

•Небольшая разница в темпах роста ВВП в течение длительного времени может привести к огромной разнице в конечном результате.

•С 1870 по 2000 гг. ВВП на душу населения в США увеличился приблизительно в 10 раз, и составил 3300 долл. США в 1870, и 32500[1] в 2000 г. Средний уровень темпов роста был равен приблизительно 1,75%. Если бы темпы роста США составили 0,75% (как в Индии, Пакистане или Филиппинах), то уровень ВВП достиг 8700 $ США (примерно ¼ фактического прироста, т.е. как Мексика, но меньше чем Португалия или Греция). При темпах роста в 2,75% в 1990 г. (как в Японии или Тайване), ВВП на душу населения Соединенных Штатов составило бы 112000 $ США (т.е., в 3,5 раза больше по отношении к фактическому ВВП 2000 г.).

•При темпе роста в 1 %, фактический доход такой возрастной категории как дети (США) может приблизительно увеличиться в 1,4 раза фактического дохода. При темпе роста в 3%, соответственно, в 2,5 раза. Темп роста в некоторых Восточно-Азиатских странах в 6% за 1960 по 1990 годы, способствовал его увеличению приблизительно в 6 раз и это только при одной генерации.

• С учетом важности устойчивости (длительного или непрерывного) темпов роста, возникает естественный вопрос: что можно сделать для его ускорения.

•Исходя из этого, мледует определить факторы, способствующие экономическому росту, и способы управления ими?

•Для этого необходимо понять, что является детерминантами экономического роста, а также определить влияние экономического роста на социальное благосостояние. Для этого рассмотрим Теорию Роста.

1.2. Мировое распределение уровня дохода и темпы роста

- Как было отмечено ранее, в 2000 г. многие страны имели уровень жизни

[1] Допустим y_0 будет ВВП на душу населения в году 0, y_T ВВП на душу населения в году T и X среднегодовой темп роста за этот период. Тогда, $y_T = (1+x)^T y_0$. Логарифмируя, вычисляем $\ln y_T - \ln y_0 = T \ln(1+x) \approx T_x$, или равносильно $\bar{x} \approx (\ln y_T - \ln y_0)/T$

ниже, чем США. Это свидетельствует о высоком уровне разброса доходов по странам.

•На рис. 1. показано распределение ВВП на душу населения в 2000 г. в 147 странах по статистике базы данных Саммерса и Хетсона. Самой богатой страной является Люксембург, где с ВВП на душу населения составляет 44000 $ США. США на втором месте - 32500 $. Страны семерки и большинство стран Организация экономического сотрудничества и развития (ОЭСР) заняли 25 мест верхнего уровня, наряду с Сингапуром, Гонконгом, Тайвань и Кипром. С другой стороны, большинство африканских стран заняли нижние 25 мест столбца распределения. Танзания оказалось беднейшей страной - лишь 570 $ на душу населения, что составляет менее 2% дохода в США или Люксембурге, соответственно.

•Межстрановая дисперсия дохода наблюдалась и с периода с 1960 г. по 2000 годы. Однако, в течение этих лет, произошли важнейшие перемещения. Аргентина, Венесуэла, Уругвай, Израиль и Южная Африка были в числе 25 лучших в 1960 г., но не попали в этот ряд в 2000 г. С другой стороны, Китай, Индонезия, Непал, Пакистан, Индия и Бангладеш росли достаточно быстро, в результате чего покинули нижние 25 мест.

•Большие перемещения в распределении доходов отразили устойчивое различие в темпах экономического роста.

На уровне темпов роста отражается уровень дохода населения. Средний уровень ежегодного роста составило 1,8%, что означало, удвоение богатства стран в 2000 г. почти вдвое по сравнению с 1960 годом. По отношению к 1960 г. США слегка превысили среднегодовой темп роста. Страной с самыми быстрыми темпами роста оказался Тайвань, чей уровень ежегодного роста составил более 6 %, т.е. наблюдался 10 - кратный рост в течение 40-летнего периода. Самые замедленные темпы роста наблюдались в Замбии, где наблюдался спад экономики почти на половину за анализируемый период.

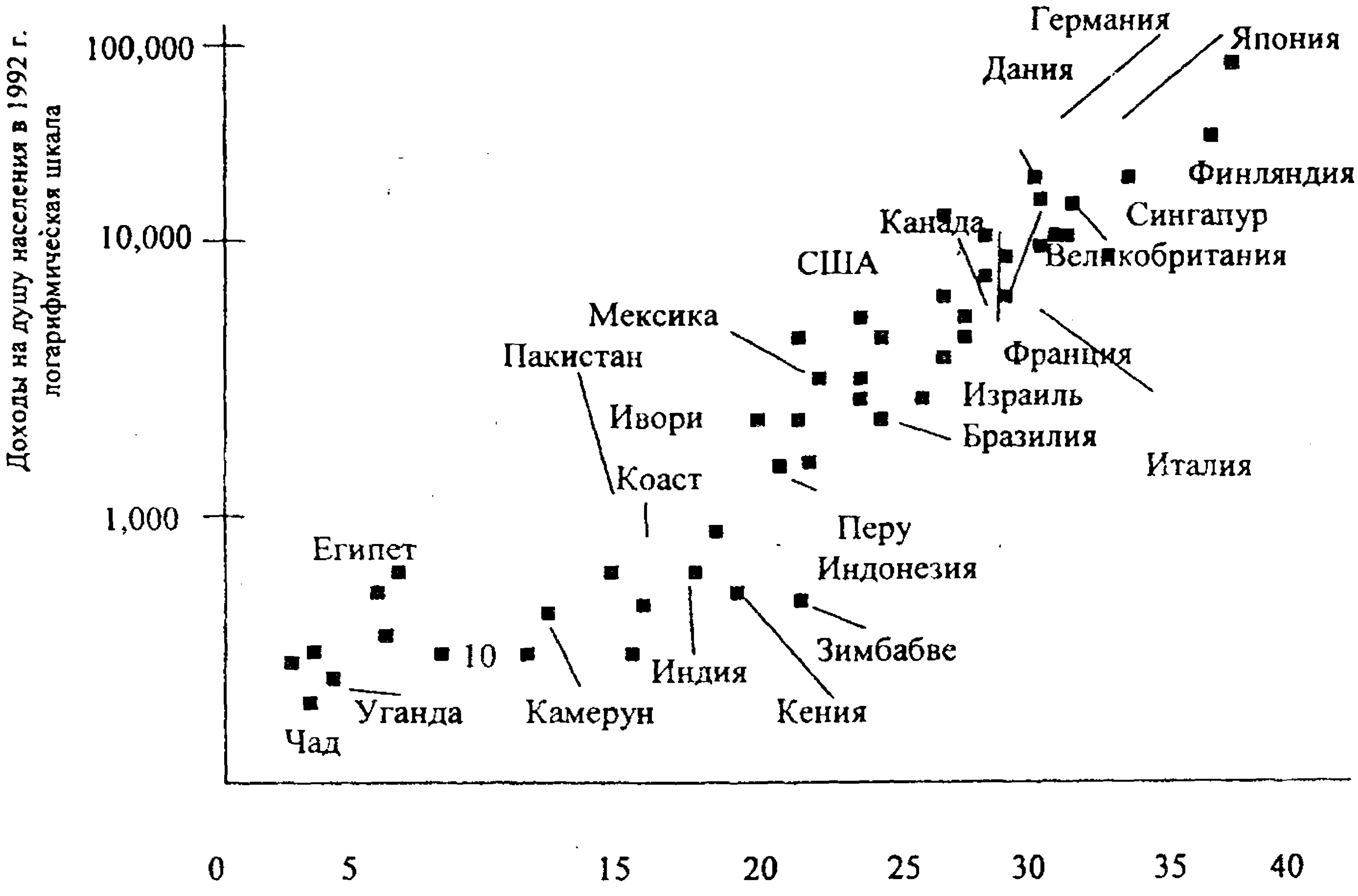


Рис. 1. Международное свидетельство ставки инвестиции и дохода на душу населения

•Большинство Восточно-Азиатских стран (Тайвань, Сингапур, Южная Корея, Гонконг, Таиланд, Китай и Япония), вместе с Ботсваной (в порядке исключения от иных субсахара-африканских стран), Кипром, Румынией и Мавританией выступили звёздами экономического роста; они были «чудом роста» своего времени. Некоторые страны ОЭСР (Ирландия, Португалия, Испания, Греция, Люксембург и Норвегия) также разместились в верхней двацадке таблицы распределения роста. С другой стороны, 18 мест в нижней двацадке заняли субсахара – африканские страны. Другому описанию «разрушительного роста» (спад) соответствуют Венесуэла, Чад и Ирак.

1.3. Безусловная конвергенция против условной

Несмотря на важные перемещения в мировом распределении доходов, отражающие существенную разницу в темпах роста, разрыв между средним доходом и продуктивностью остаётся по-прежнему постоянным.

Большинство стран не испытывали драматических изменений в их относительных позициях в мировом распределении доходов за период с 1960-

2000 годы. Другими словами, разница в доходах по странам оставалось постоянной, это также означало, что число бедных в среднем увеличивалось не быстрее, чем богатых. Или другими словами, безусловная конвергенция была равна нулю. Следовательно составив регрессию

$$\Delta \ln y_{2000-1960} = \alpha + \beta \cdot \ln y_{1960}$$

оцениваемое значение β – будет равно нулю.

С другой стороны, рассмотрим регрессию

$$\Delta \ln y_{1960-90} = \alpha + \beta \cdot \ln y_{1960} + \gamma \cdot X_{1960}$$

где X_{1960} означает набор специфических страновых показателей, который охватывает уровень образования, фискальную и монетарную политику, рыночную конкуренцию и.т.д. Оцениваемый коэффициент β будет отклоняться в положительную сторону (в частности, около 2 % годовых). Поэтому, рассматривая группу стран, разделяющих схожую характеристику (измеренный по X), страны с низким первоначальным доходом более склонны к ускоренному росту, чем их богатые контпартнеры, и поэтому бедные страны склонны догонять богатых в той же группе. Это и есть то, что называется условной конвергенцией.

Условная конвергенция, относится к группе стран ОЭСР и группе штатов США.

1.4. Упорядоченные факторы

На основе нижеследующих упорядоченных факторов построим модель экономического роста (Калдор, Кузнец, Ромер, Лукас, Барро, Менкю-Ромер-Вийл и др.):

1. Важные изменения в краткосрочном периоде: производство, занятость, инвестиции и потребление, часто колеблются в результате бумов и спада.

2. Сбалансированный рост в долгосрочном периоде: соотношение производительности капитала на каждого рабочего (Y/L и K/L), растет

пропорционально, но не стремится к нулю. Соотношение капитала к производству (K/Y) близко константе. Возвратность капитала (r) относительно постоянно, уровень зарплаты (w) растет такими же темпами как производство. Также доля дохода по труду и капиталу (w L/Y и r K/Y) сохраняется относительно постоянно.

3. Существенная разница в уровнях дохода и темпах роста по странам.

4. Устойчивая разница против условной конвергенции.

5. Общее образование: сильно коррелированно с высоким уровнем дохода (причинная связь двух направлений очевидна), разница в уровне сбережений объясняет большое дробление межстрановой разницы в производстве важным предсказателем высокого роста.

6. Научно-исследовательская работа и информационные технологии: основные, мощные двигатели роста (но требуют, прежде всего, высокого уровня образования, навыков).

7. Политика правительства: налогообложение, инфраструктура, инфляция, наблюдение за соблюдением законов, право на собственность и коррупция, важные детерминанты (факторы) роста.

8. Демократия: перевернутая U образная связь, которая означает, что авторитарность - плохо, а демократия - хорошо для экономического роста, но слишком много демократии снижает темпы роста.

9. Откровенно: международная торговля и финансовая интеграция повышают рост (но нет необходимости, если это между Севером и Югом, на примере США).

10. Неравенство: кривая Кузнеца, а именно перевернутая U-образная связь между неравенством дохода и ВВП на душу населения (также с темпом роста).

11. Рождаемость: высокий уровень рождаемости связан с уровнем дохода и низким уровнем роста, процесс развития следует по кривой Малтуса, что означает, что уровень рождаемости первоначально растет и затем падает с развитием экономики.

12. Финансовые рынки и деление риска: банки, кредиты, рынки ценных бумаг, социальные страхования.

13. Структурные трансформации: сельское хозяйство → производство → услуги.

14. Урбанизация: семейное производство → организованное производство; малые деревни → большие города; расширенная местная торговля.

15. Другие институциональные и социальные факторы: колониальная история, этническая неоднородность, социальные нормы.

Теория экономического роста дает объяснение тому, как все вышеназванные факторы взаимосвязаны между собой и с прогрессом экономического роста. Усвоив «механику» экономического роста, лично будет не только предсказывать поведение экономики для дачи фундаментальных установок, рекомендаций (позитивный анализ), но также идентифицировать какая политика государства или социально-экономические реформы могут продвигать социальное благосостояние в долгосрочной перспективе (нормативный анализ).

Выводы по I главе

Глава состоит из 4-х параграфов и логически завершается упорядочением факторов рассмотренных в предыдущих параграфах. В частности, делая вывод по мировому уровню распределения уровня дохода и темпе роста можно построить (составлять) последовательную зависимость основных, соизмеримых показателей социально-экономического развития, как доход и ВВП или (и) с темпом роста.

Для читателя некоторые моменты изложения могут быть непонятными, нами приводятся перечень сайтов, которые могут быть полезными при освоении материала.

Рекомендуемые сайты

1. www.penlac.com
2. www.npg.org
3. www.preferredgroup.com
4. www.rehydrate.org
5. www.ssc.upenn.edu
6. www.bris.ac.uk

Список использованной литературы

Galor O. and J.Zeira. "Income Distribution and Macroeconomics". Review of Economic Studies 60, no.1 (January 1993): 35-52

Greenwood J. and B.Jovanovic. "Financial Development, Growth, and the Distribution of Income". Journal of Political Economy 98, no.5, pt.1 (October 1990): 1076-1107

Brock W. and L.J.Mirman. "Optimal Economic Growth and Uncertainty: The Discounted Case". Journal of Economic Theory 4 (1972): 197-513

Acemoglu D. "directed technological change". NBER Working Paper 8287 (2001).
Barro R.J. and X.Sala-i-Martin. Economic Growth. New York: McGraw-Hill, 1995, chaps. 1-7, 12, and appendix to chap. 3

Вопросы для обсуждения и контроля

1. При, каких условиях страны с низким темпом роста дохода ВВП на душу населения смогут достичь уровня большой семерки
2. Как можно управлять устойчивым экономическим ростом
3. Раскройте сущность Теории Роста
4. Связь между уровнем темпов роста и уровнем дохода населения
5. Что называется условной конвергенцией

Что подразумевается под «механикой» экономического роста (кривая Малтуса, перевернутая U образная связь)

ГЛАВА 2. МОДЕЛЬ РОСТА СОЛОУ (И ВЗГЛЯД ВПЕРЕД)

2.1. Централизованное распределение

•Проведем анализ модели Солоу, предполагая, что социально планирующий (управляющий) является доброжелателем, и что его выбор - устойчивое и временное размещение ресурсов.

Размещение (распределение) в децентрализованной конкурирующей рыночной среде будет совпадать с размещением при социальном планирующем.

2.1.1. Экономика хозяйства и социальный планирующий

•Время является дискретным - $t \in \{0,1, 2,...\}$. При этом единицей времени может служить год, генерация или любая произвольная величина времени.

•Экономика как изолированный остров. Множество хозяйств проживает на этом острове. Отсутствуют рынки, но производство централизованно. При этом присутствует доброжелательный социальный планирующий, который управляет всеми экономическими и социальными взаимоотношениями.

•Имеется единственный товар, который является результатом двух факторов производства: капитала и труда, который может быть потреблен тогда же или инвестирован как капитал для следующего периода.

•Каждое хозяйство имеет единицу трудовой силы, которой неэластично снабжает его социальный планирующий. Социальный планирующий использует полностью трудовую силу вместе с накопленным совокупным капиталом для производства единицы (одного) товара.

•В каждом периоде социальный планирующий накапливает постоянную долю $s \in (0,1)$ производства, чтобы добавить в накопленный капитал экономики и одинаково распределяет оставшуюся часть по хозяйствам.

•В этой последовательности допустим: L_t – количество хозяйств (и размер рабочей силы) в период t; K_t – совокупный накопленный капитал в начале периода t; Y_t - совокупный продукт в период t; C_t - совокупное потребление в период t и I_t - совокупные инвестиции в период t. Соответственно, переменные, обозначенные строчными буквами, представляют величины на душу населения: $k_t = K_t/L_t$, $y_t = Y_t/L_t$, $i_t = I_t/L_t$ и $c_t = C_t/L_t$.

2.1.2. Технология и производство

•Технология производства товара обозначается функцией

$$Y_t = F(K_t L_t) \qquad (2.1)$$

где F: $R^2_t \rightarrow R_t$ - (постоянная) производственная функция. Допустим, что F непрерывна (но не всегда необходима) и дважды дифференциальна. Скажем, что технология «неоклассическая», если F удостоверяет следующие условия.

1. Неизменный эффект масштаба (НЭМ), или линейная однородность:

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L)$$

$$\forall \mu \succ 0$$

2. Позитивный и убывающий предельный продукт

$$F_K(K,L)>0, \quad F_L(K,L)>0$$

$$F_{KK}(K,L)<0, \quad F_{LL}(K,L)<0$$

где $F_x \equiv \partial F / \partial x$ и $F_{xz} = \partial^2 F/(\partial x \partial z)$ для x, z $\in \{K, L\}$

3.Условие Инады:

$$\lim_{K \to 0} F_K = \lim_{L \to 0} F_L = \infty.$$

$$\lim_{K \to \infty} F_K = \lim_{L \to \infty} F_L = 0.$$

Косвенно F удовлетворяет

$$Y = F(K,L) = F_K(K,L)K + F_L(K,L)L$$

или эквивалентно

$$1 = \varepsilon_K + \varepsilon_L$$

где

$$\varepsilon_K \equiv \frac{\partial FK}{\partial FK} \quad \text{и} \quad \varepsilon_L \equiv \frac{\partial FL}{\partial LF}$$

Также F_K и F_L в нулевой степени являются однороднкми. Это означает, что предельный продукт зависит только от соотношения K/L. Если $F_{KL} > 0$, то капитал и рабочая сила являются взаимозаменяемые.

Рис. 2. Производственная функция

•Технология в интенсивной форме:

допустим $y = \frac{Y}{L}$ и $k = \frac{K}{L}$

затем по НЭМ

$$y = f(k) \qquad (2.2)$$

где

$$f(k) \equiv F(k, l)$$

При определении f и свойств F

$$f(0) = 0$$

$$f'(k) > 0 > f''(k)$$

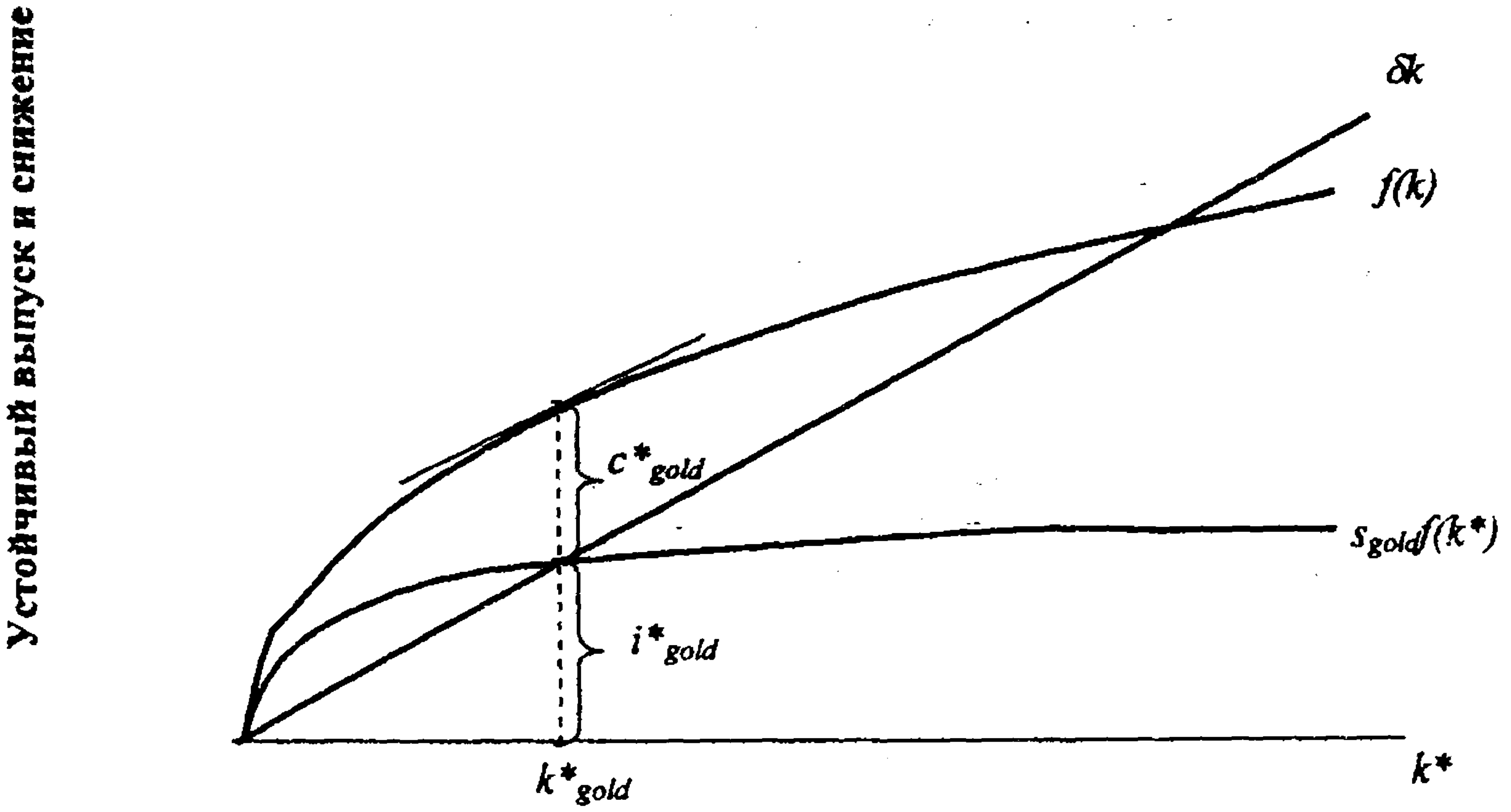
$$\lim_{k \to 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$$

Также

$$F_K(K, L) = f'(k)$$

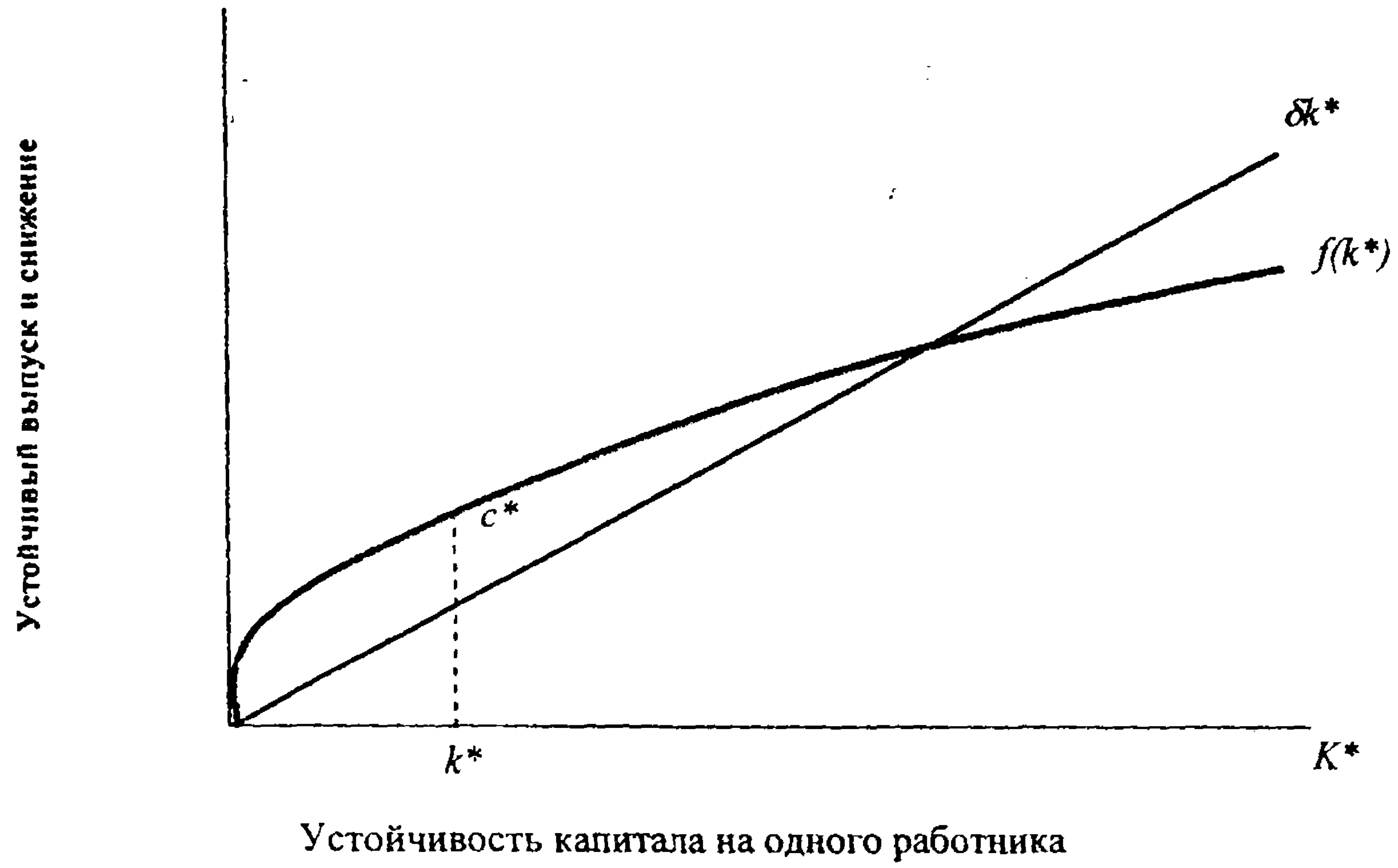
$$F_L(K, L) = f(k) - f'(k)k$$

• Пример: по методу Кобба-Дугласа - F (K, L) = $K^{\alpha} L^{1-\alpha}$
В этом случае, $\varepsilon_K = \alpha$, $\varepsilon_l = 1 - \alpha$ и $f(k) = k^{\alpha}$



Устойчивость капитала на одного работника

Рис. 3. Норма сбережения и золотое правило



2.1.3. Ресурсные ограничения и закон движения капитала и рабочей силы

•Имеется единица товара, который может быть потреблен или инвестирован. Разумеется, что сумма совокупного потребления и совокупной инвестиции не может превышать сумму совокупной продукции. Таким образом социальный планирующий сталкивается с текущим ресурсным ограничением:

$$C_t I_t \le Y_t \qquad (2.3)$$

Соответственно, в условиях на душу населения:

$$c_t + i_t \le y_t \qquad (2.4)$$

•Предположим, что n≥0 рост населения в каждом периоде. Величина рабочей силы растет по истечении времени следующим образом:

$$L_t(1+n)L_{t-1} = (1+n)^t L_0 \qquad (2.5)$$

Обозначаем $L_0 = 1$.

•Предположим, существующий капитал с истечением времени обесценивается по фиксированной норме δ Є [0,1]. Накопленный капитал в начале следующего периода представлен, как необесценевающаяся часть текущего капитала плюс инвестиции того же времени. Таким образом, закон движения капитала выглядит:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \qquad (2.6)$$

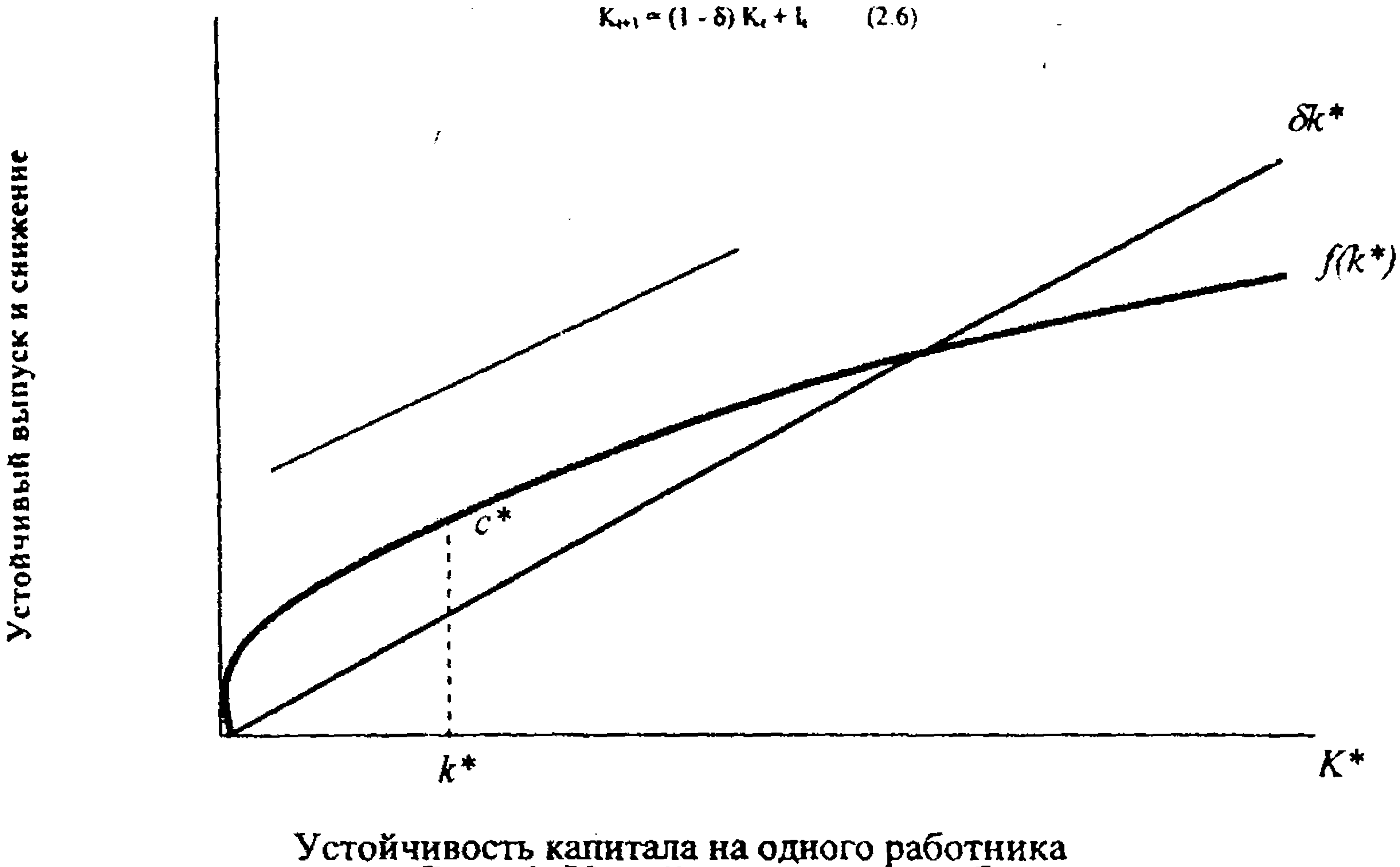


Рис. 4. Устойчивость потребления

Соответственно, в расчете на душу населения

$$(1+n)k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Можно примерно преобразовать это соотношение в

$$K_{\delta+1} \approx (1-\delta-n)k_t + i_t \qquad (2.7)$$

Сумма δ + n может быть интерпретирована как норма «эффективного» обесценивания капитала на душу населения. (Примечание: такое приближение соответствует любому произвольному товару, когда экономика сходится с его устойчивым состоянием. Также это утверждение может быть однозначным, если время непрерывно, но не дискретно).

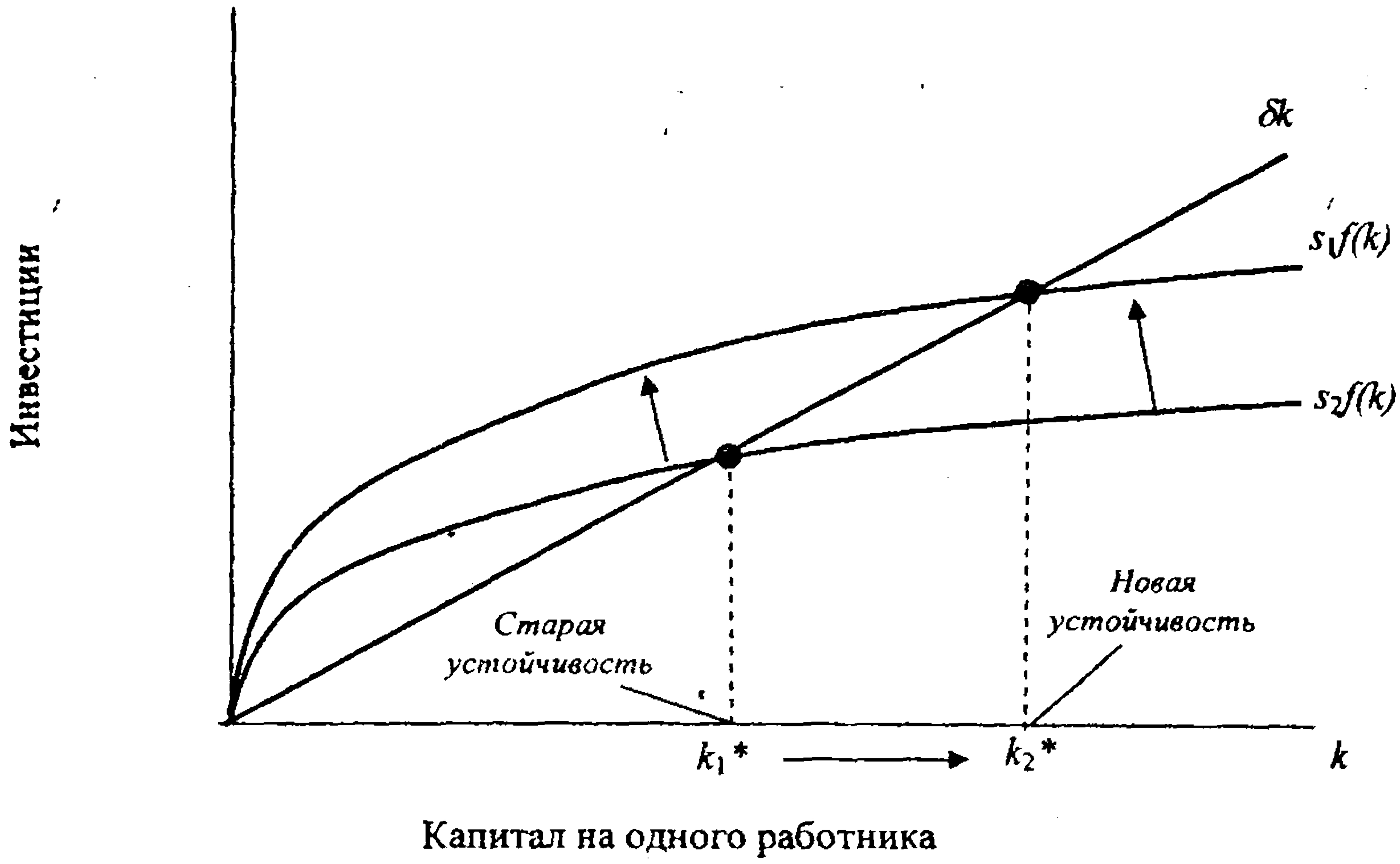


Рис. 5. Рост в норме сбережения

2.1.4. Динамика капитала и потребления

•В большинстве изучаемых в этом курсе моделях роста, ключом к анализу является получение динамической системы, которая характеризует эволюцию совокупного потребления и капитала; т.е. получение системы различных уравнений в C_t и K_t (или c_t и k_t). Такая система очень проста в моделе Солоу.

•Сложив закон движения капитала (2.6), ресурсные ограничения (2.3), и технологии (2.1), получим другое уравнение накопленного капитала:

$$K_{t+1} - K_t = F(K_t L_t) - \delta K_t - C_t \qquad (2.8)$$

где накопленное изменение капитала представлено совокупным производством минус обесценивание капитала минус совокупное потребление. С другой стороны, совокупное потребление, согласно нашему предположило, является фиксированной частью (1-s) производства:

$$C_t = (1-s)F(K_t, L_t) \qquad (2.9)$$

•Соответственно, в условиях на душу населения, (2.6), (2.4) и (2.2) представляют динамику капитала

$$k_{t+1} - k_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t - c_t \qquad (2.10)$$

Тогда, как потребление представлено

$$c_t = (1-s)f(k_t) \qquad (2.11)$$

•С этого момента, проанализируем динамику экономики только на душу населения. Перевод результатов в условие совокупности является простой задачей.

2.1.5. Правило Выравнивания

•Сочетая (2.10) и (2.11), получим фундаментальное уравнение модели Солоу

$$k_{t+1} - k_t = sf(k_t) - (\delta + n)k_t \qquad (2.12)$$

отмечая, что определение k_{t+1} - функция от k_t.

Предположение 1. Дана некоторая первоначальная точка $k_0 > 0$, динамика экономики представлена траекторией $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$, где

$$k_{t+1} = G(k_t) \qquad (2.13)$$

для всех $t \geq 0$, где

$$G(k) \equiv sf(k) + (1 - \delta - n)k$$

Соответственно, норма роста капитала представлена

$$\gamma_t \equiv \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \gamma(k_t) \qquad (2.14)$$

где $\gamma(k) \equiv s\,ø(k) - (\delta + n),\ ø(k) \equiv f(k)/k$

Доказательство. (2.13) вытекает из (2.12) и преобразование дает (2.14) что и требовалось доказать.

•G – соответствует тому, что мы окажемся в «Правиле выравнивания» по модели Рамзея. Динамика развития экономики кратко представлена траекторией $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ которая удовлетворяет (2.12), или эквивалентно (2.13), для всех $t \geq 0$, где k_o исторически дано.

2.1.6. Устойчивое состояние

• Устойчивое состояние экономики определяется, как любой уровень k^*, если экономика начинает с $k_0 = k^*$, затем $k_t = k^*$ для всех $t \geq 1$. Это значит, что экономика находится в любой фиксированной точке k^* в устойчивом состоянии (2.12) или (2.13). Равнозначно, что устойчивое состояние находится в любой фиксированной точке (c^*, k^*) системы (2.10) – (2.11).

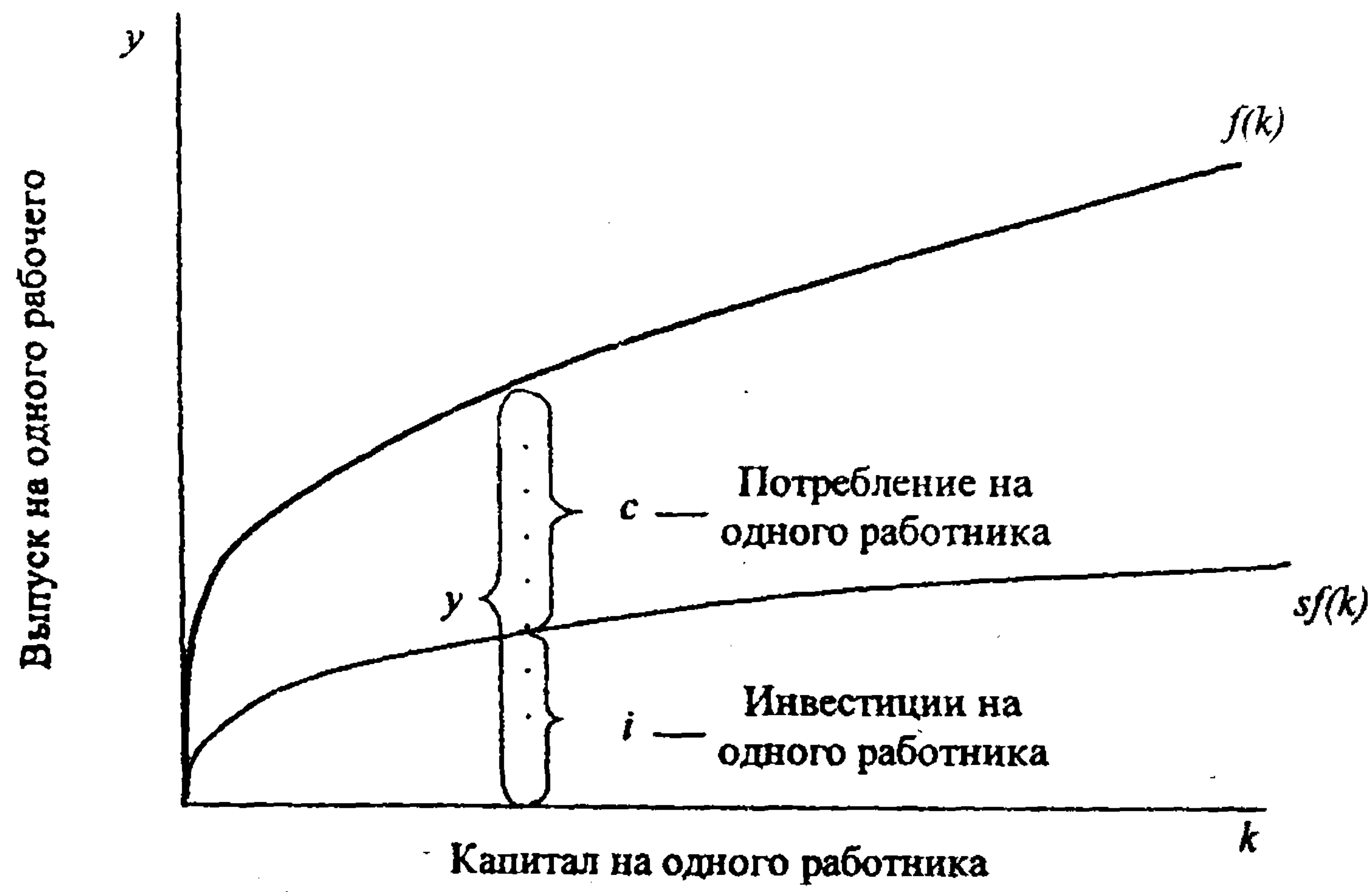


Рис. 6. Выпуск, потребление и инвестиции

• Тривиальное устойчивое состояние c=k=0, где нет ни капитала, ни продукции и нет потребления. Это будет неустойчивым состоянием, если f(0)>0. Мы заинтересованы в устойчивом состоянии, где капитал, производство и потребление позитивны и конкретны. В этом легко можно убедиться на рис.7.

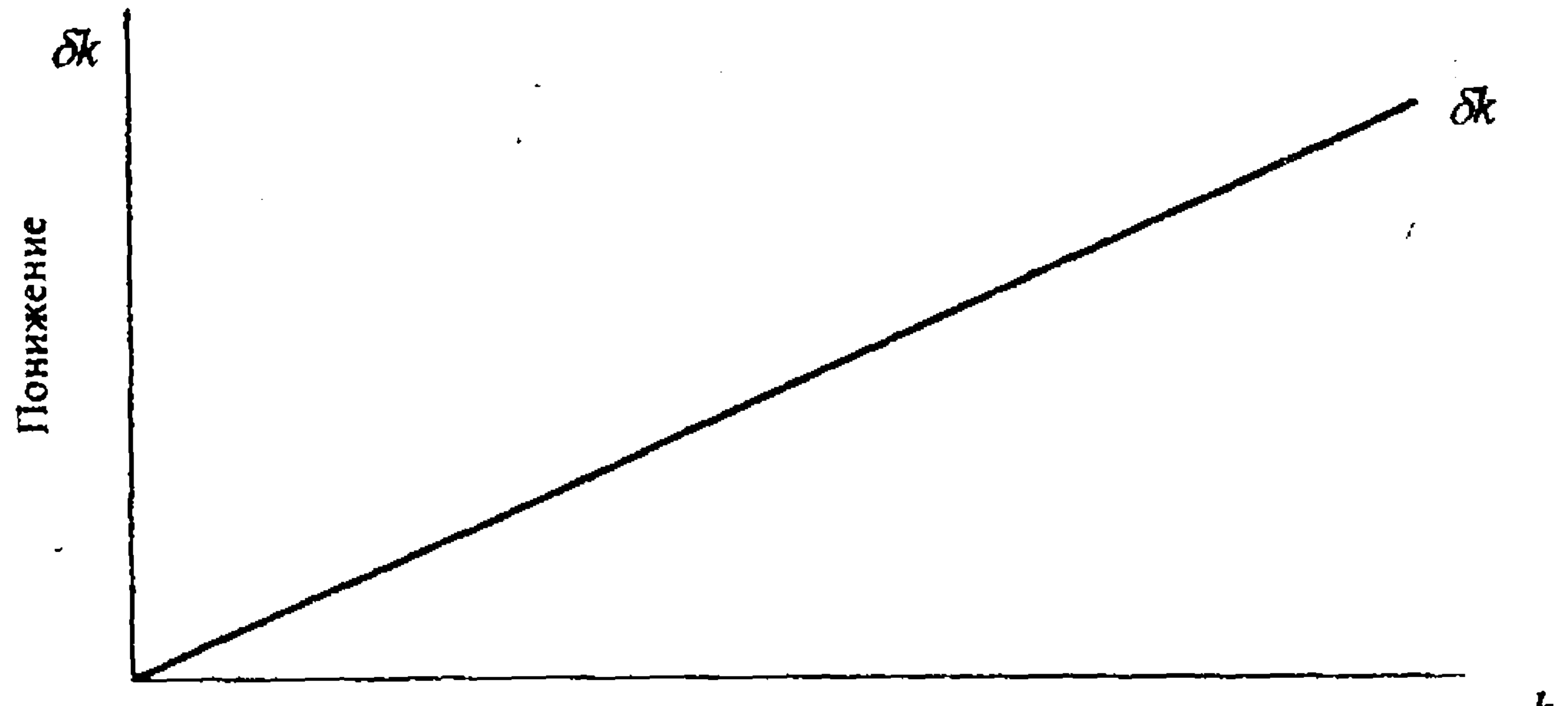


Рис. 7. Понижение

Предположение 2. Предположим $\delta + n \in (0, 1)$ и $s \in (0, 1)$. Устойчивое состояние $(c^*, k^*) \in (0, \infty)^2$ в экономике существует и оно уникален. k^* и y^* растут в месте с s и снижаются вместе с δ и n, тогда как c^* не монотонен с ростом s и снижается с ростом δ и n. В конечном итоге, $y^*/k^* = (\delta + n)/s$.

Доказательство. k^* есть устойчивое состояние, если и только если при условии

$$0 = sf(k^*) - (\delta + n)k^*$$

Равнозначно,
$$\frac{y^*}{k^*} = \phi(k^*) = \frac{\delta + n}{s} \qquad (2.15)$$

где
$$\phi(k) \equiv \frac{f(k)}{k}$$

Функция ø представляет соотношение продукции к капиталу в экономике. Свойства функции f подразумевают, что ø является непрерывной (и дважды дифференцируемой), снижающейся и удовлетворяюўей условие Инада при $k = 0$ и $k = \infty$:

$$\phi''(k) = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\frac{F_L}{k^2} < 0$$

$$\phi(0) = f'(0) = \infty \quad \text{и} \quad \phi(\infty) = f'(\infty) = 0$$

где последнее истекает из правила L "Госпиталь". Это предполагает, что уравнение (2.15) имеет решение при условии, если и только если $\delta + n > 0$ и $s > 0$. И решение уникально, когда оно существует. Уникальность устойчивого состояния представляется

$$k^* = \phi^{-1}\left(\frac{\delta + n}{s}\right)$$

с того времени, как ø' < 0, k^* является убывающей функцией от $(\delta + n)/s$. С другой стороны, потребление выглядит

$$c^* = (1 - s)\, f(k^*)$$

Это приводит к тому, что c^* убывает с ростом $\delta + n$, но s имеет неясный (двойной) эффект, что и требовалось доказать.

2.1.7. Динамика перехода

•Выше было охарактеризовано устойчивое (уникальное) состояние экономики. Естественно, мы заинтересованы в знании того, вернется ли экономика в устойчивое состояние после возмущения от экзогенного шока и отклонения от устойчивого состояния.

•Последующее применение свойств *G* подтверждает, что модель Солоу, которая основана на устойчивом состоянии, всегда гарантирована и монотонна.

Предположение 3. Дано первоначальное значение некоторого $k_0\ \epsilon(0,\ \infty)$, управление асимптотически совпадает с устойчивым состоянием экономики. Переход происходит монотонно. Темп роста позитивен и по истечении времени приближается к нулю, если $k_0 < k^*$; темп роста негативен и по истечении времени растет в направлении к нулю, если $k_0 > k^*$.

Доказательство. Из свойств функции f видно, $G'(k)=sf'(k)+(1-\delta-n)>0$ и $G''(k)=sf''(k)<0$. Это означает G резко растет и резко вогнутый. Кроме того, $G(0)=0$, $G'(0)=\infty$, $G(\infty)=\infty$, $G'(\infty)=(1-\delta-n)<1$. При определении k^*, $G(k)=k$ если $k=k^*$. Отсюда следует, что $G(k)>k$ для всех $k<k^*$ и $G(k)<k$ для всех $k>k^*$. Отсюда следует, что $k_t < k_{t+1} < k^*$ когда $k_t \in (0,k^*)$, и поэтому последовательная траектория $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ резко растет, если $k_0<k^*$. При монотонности k_t асимптотически сходится с некоторым $k \le k^*$. При непрерывности G, k должен удовлетворять $k = G(k)$. Это означает, что k должен быть фиксированной точкой G, хотя мы уже доказали, что G имеет уникальную фиксированную точку, которая доказывает, что $k = k^*$. Аргумент симетричности доказывает, когда $k_0>k^*$, траектория $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ резко падает и вновь асимптотически сближается к k^*.

Далее рассмотрим темп роста накопленного капитала. Темп роста накопленного капитала представлен как:

$$\gamma_t \equiv \frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = s\phi(k_t)-(\delta+n) \equiv \gamma(k_t)$$

Отметим, что $\gamma(k)=0$, если $k=k^*$, $\cdot j(k) > 0$ если $k<k^*$ и $\gamma(k)<0$ если $k>k^*$. Кроме того, при снижении дохода, $\gamma'(k) = s\o'(k)<0$. Это приводит к тому, что $\gamma(k_t)<\gamma(k_{t+1})<\gamma(k^*)=0$, когда $k_t \in (0, k^*)$ и $\gamma(k_t)>\gamma(k_{t+1})>\gamma(k^*)=0$, когда $k_t \in (k^*, \infty)$. Это доказывает, что γ_t положителен и уменьшаясь, стремиться к нулю, если $k_0 < k^*$, отрицателен и увеличиваясь стремится к нулю, если $k_0 > k^*$. Что и требовалось доказать.

•На рис. 8 изображены G(k) и связь между k_t и k_{t+1}. Пересечение графы G с 45^0 линией представляет устойчиво состояние накопленного капитала k*. Стрелка показывает траекторию $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$, первоначального k_0.

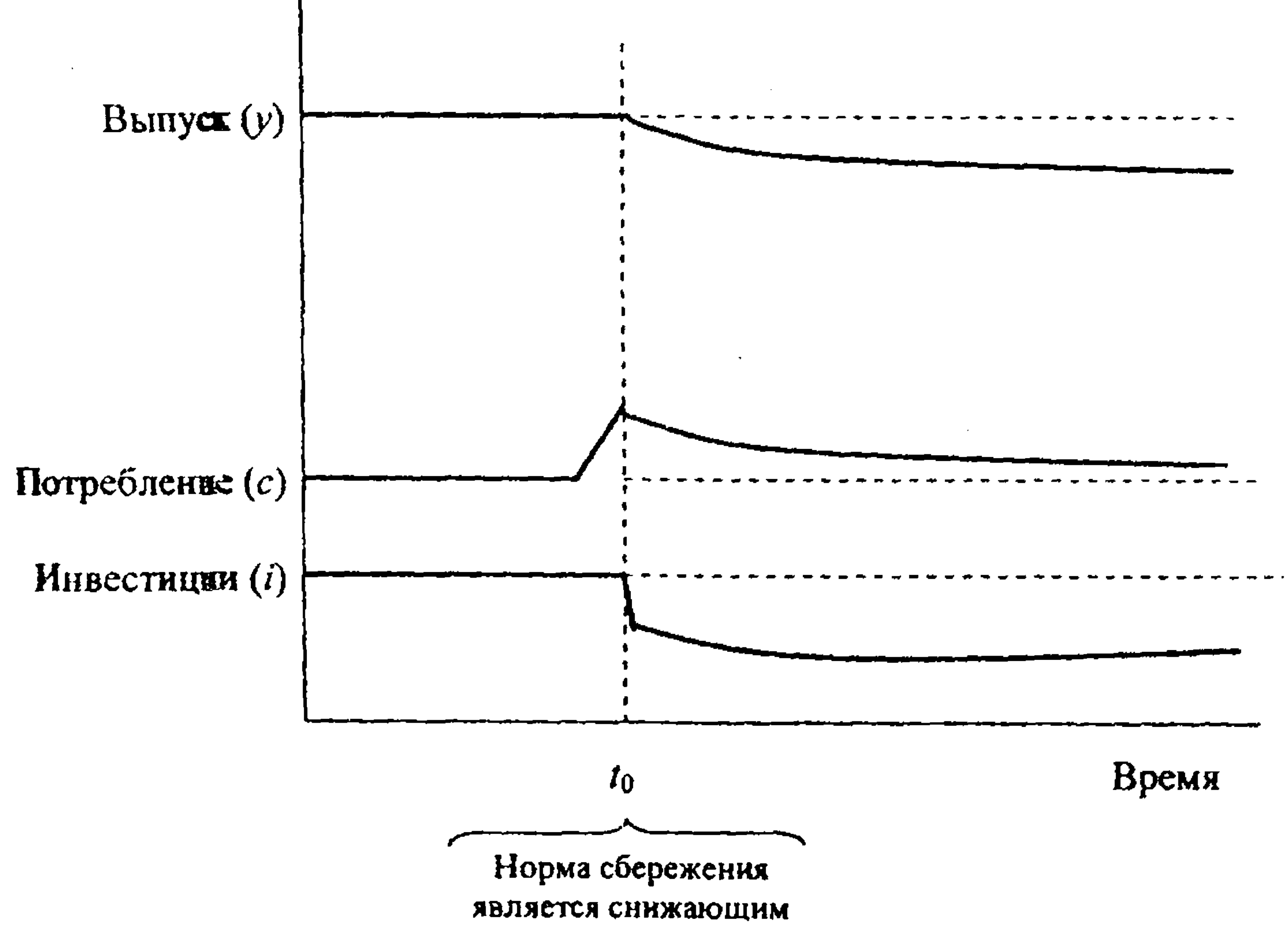


Рис. 8. Сокращение сбережения, когда начинается с капиталом в золотой правиле устойчивости

•На рис. 2 изображает γ(k), отношение между k_t к γ_t. Пересечение кривой γ с 45^0 линией придает устойчивость накопленныму капиталу k^*. Негативный наклон отражает то, что, называется «условной конвергенцией».

•Наблюдаются дискуссии по местной стабильности против глобальной по причине того, что ø'(k*)<0, система локально стабильна. Так как ø глобально понижается, то система глобально устойчива и переход монотонен.

2.2. Децентрализованное рыночное распределение

Нами было охарактеризовано централизованное распределение, диктуемое социальным планирующим. Теперь, рассмотрим рыночное распределение.

2.2.1. Хозяйство

•Хозяйство - это династие, проживающее во временном континууме. Обозначим хозяйство $j \in [0,1]$, приняв $L_0 = 1$. Количество людей в каждом хозяйстве растет постоянными темпами $n \geq 0$. Поэтому, размер населения в периоде t равно $L_t=(1+n)^t$ и количество людей в каждом хозяйстве в периоде t также L_t.

•Распишем переменные c_t^j, k_t^j, b_t^j, i_t^j на каждого человека по хозяйству j. Каждый человек в хозяйстве является единицей рабочей силы в каждом периоде, который он неэластично предлагает в конкурентную среду рынка труда за единовременную заработную плату w_t. Хозяйство j также имеет первоначальный капитал k_0^j. Капитал в хозяйстве j аккумулируется согласно

$$(1+n)k_{t+1}^j = (1-\delta)k_t^j + i_t$$

который мы приближаем

$$k_{t+1}^j = (1-\delta-n)k_t^j + i_t \qquad (2.16)$$

Хозяйство предлагает свой собственный капитал фирмам на рынке капитала по ставке r_t. Хозяйство также может быть держателем акций некоторых фирм. Допустим, π_t^j - есть дивиденды (доход фирмы), которые хозяйство j получает в период t. Как позже станет ясно, что без какой-либо потери большинство не примет это за торговлю акциями.

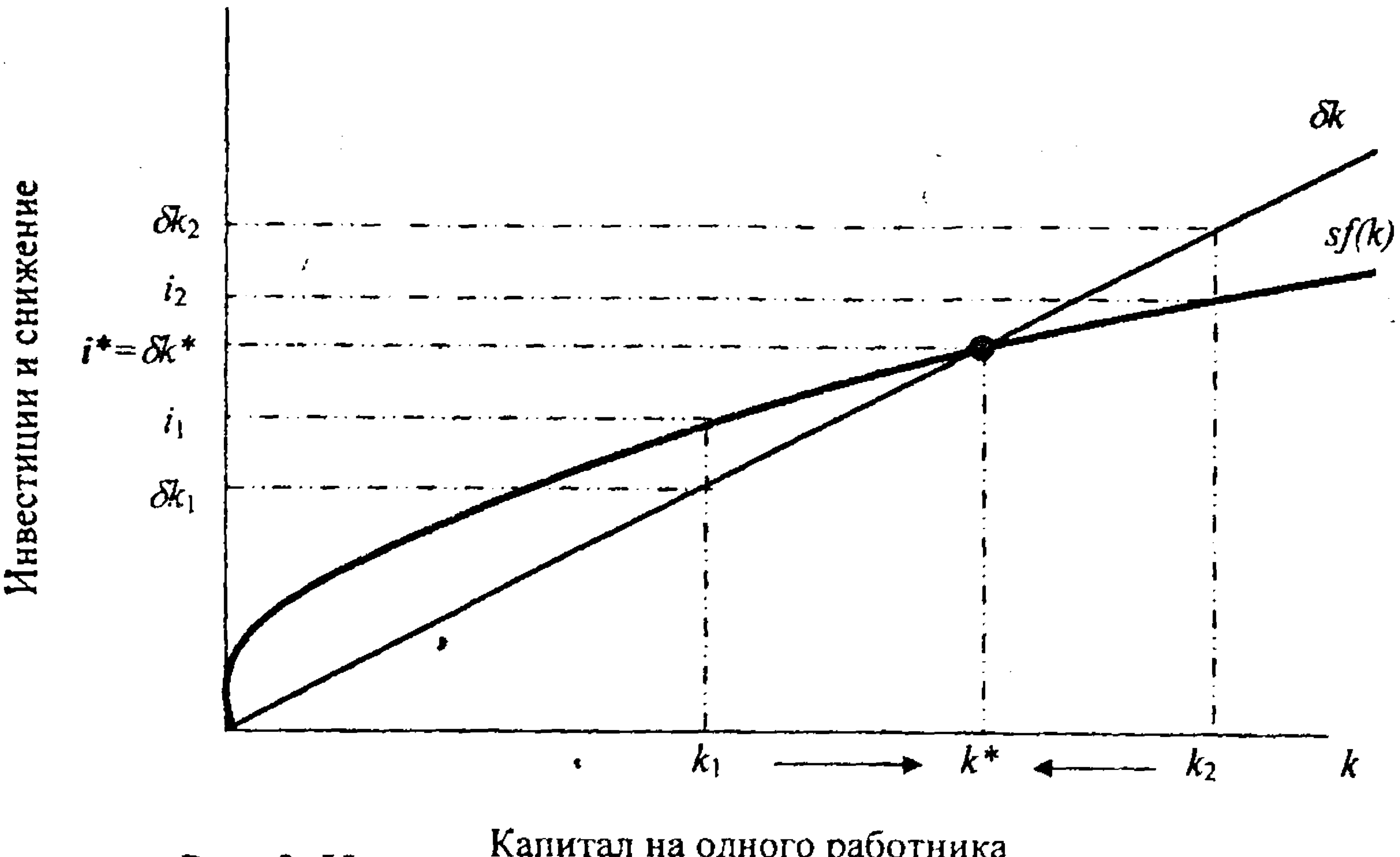


Рис. 9. Инвестиции, снижение и устойчивость

(Это потому что ценность акций фирм будет равна нулю в эквилибриуме и его ценность в любой операции с акциями будет также равна нулю).

Допустим, что хозяйство j удерживает фиксированную долю α^j совокупного количества акций, так как $\pi_t^j = \alpha^j \Pi_t$, где Π_t - совокупная прибыль. Разумеется, $\int(\alpha^j d_j) = 1$.

•Хозяйство использует свою прибыль (доход) для финансирования потребления или инвестирует в новый капитал:

$$c_t^j + i_t^j = y_t^j.$$

общий доход на человека хозяйства j в периоде t исчисляется таким образом:

$$y_t^j = w_t + r_t k_t^j + \pi_t^j \qquad (2.17)$$

сложив, можно вычислить ограничение бюджета хозяйства j в период t следующим образом:

$$c_t^j + i_t^j = w_t + r_t k_t^j + \pi_t^j \qquad (2.18)$$

•Таким образом динамика хозяйства в плане инвестиций и потребления носит упрощенный, линейный характер. Хозяйство сберегает долю s и потребляет остаток:

$$c_t^j = (1-s)y_t^j \quad и \quad i_t^j = sy_t^j. \qquad (2.19)$$

2.2.2. Фирмы

•Представим, что M_t - произвольное количество фирм в периоде t, обозначенный $m \in [0, M_t]$. Фирмы нанимают работников и продукт капитал на конкурентном рынке труда и капитала, имеют доступ к одинаковым неклассическим технологиям, и производят однородный, товар, который продается другим хозяйствам в конкурентной среде.

•Допустим, K_t^m и L_t^m обозначают сумму капитала и рабочей силы, которых фирма m нанимает в периоде t. Соответственно, прибыль этой фирмы в период t равна

$$\Pi_t^m = F\left(K_t^m, L_t^m\right) - r_t K_t^m - w_t L_t^m$$

•Фирмы заинтересованы в максимизации прибыли. Условия первого порядка для внутреннего решения требуют

$$F_K\left(K_t^m, L_t^m\right) = r_t \qquad (2.20)$$

$$F_L\left(K_t^m, L_t^m\right) = w_t \qquad (2.21)$$

•Вспомним, что предельный продукт в степени является однородным; что означает, зависимость только от соотношения капитала и рабочей силы. В частности, F_K убывающая функция соотношения K_t^m / L_t^m и F_L возрастающая функция K_t^m / L_t^m. Каждое из вышеназванных условий таким образом связывается с уникальным соотношением капитала и труда K_t^m / L_t^m . Для решения внутренней проблемы фирмы – существования, r_t и w_t должны быть также устойчивы, как и K_t^m / L_t^m . Это тот случай, когда если и только если некоторое $X_t \in (0, \infty)$. Так, что:

$$r_t = f'(X_t) \qquad (2.22)$$

$$w_t = f(X_t) - \bar{f}'(X_t)X_t \qquad (2.23)$$

где $f(k) \equiv F(k,1)$. Это следует из свойств $F_K(K,L) = f'(K/L)$ и $F_L(K, L) = f(K/L) - f'(K/L) \cdot (K/L)$, которые определены ранее.

•Если (??)-(??) удовлетворяются, то УПП убывает к $K_t^m / L_t^m = X_t$, или

$$K_t^m = X_t L_t^m \qquad (2.24)$$

Это значит, что УПП связывает соотношение капитал – труд для каждой фирмы (K_t^m / L_t^m), но не размер фирмы. Более того, фирмы имеют доступ к одинаковым технологиям, они точно используют одинаковое соотношение капитал - труд.

•Допустим, (2.22) и (2.23), что

$$r_t X_t + w_t = f(X_t) \qquad (2.25)$$

Это приводит к тому, что

$$r_t K_t^m + w_t L_t^m = (r_t X_t + w_t)L_t^m = f(X_t)L_t^m = F(K_t^m, L_t^m)$$

и поэтому

$$\Pi_t^m = L_t^m[f(X_t) - r_t X_t - w_t] = 0 \qquad (2.26)$$

Это означает, что, когда удовлетворяются (2.25)-(2.26), максимальная прибыль, которую получает любая фирма, равняется точно нулю, и эта прибыль достигается для любого размера (величины) фирм пока соотношение капитал - труд остается оптимальным, если вместо (2.25)-(2.26) будет нарушенной, либо $r_t X_t + w_t \prec f(X_t)$, в случае когда фирмы получали внутреннюю прибыль, или $r_t X_t + w_t > f(X_t)$, в случае когда управление фирмы с любым положительным размером будет получать строго отрицательную прибыль.

2.2.3. Уровновешивание рынка

•Рынок капитала очищается, если и только если

$$\int_0^{M_t} K_t^m\,dm = \int_0^1 (1+n)^t k_t^j d_j$$

Это равносильно

$$\int_0^{M_t} K_t^m\,dm = K_t \qquad (2.27)$$

где $K_t \equiv \int_0^{(L_t)} k_t^j dj$ агрегированный капитал

•Рынок труда, в то же время очищается если и только если

$$\int_0^{M_t} L_t^m\,dm = \int_0^1 (1+n)^t\,dj$$

Это равнозначно

$$\int_0^{M_t} L_t^m\,dm = L_t \qquad (2.28)$$

где L_t размер рабочей силы.

2.2.4. Общее рыночное равновесие (ОРР)

•Определение общего рыночного равновесия (ОРР) более многозначительно, чем оптимизация поведения хозяйства (максимальная утилизация) или being automata (механическое накопление постоянной доли дохода). Без сомнения, всегда важно ясное понимание, что означает равновесие в каждой модели. Для децентрализованной версии модели Солоу означает следующее, допустим:

Определение 4. Равновесие экономики это размещение $\{(k_t^j,\ c_t^j,\ i_t^j)j\in[0,1]$, $(K_t^m,\ L_t^m\ )m\in[o,m_t]\}_{t=0}^{\infty}$ распределение прибыли $\{(\pi_t^j)j\in[0,1]\}$ и цена пути $\{r_t,\ w_t\}_{t=0}^{\infty}$. Таким образом $\{r_t,w_t\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{\ \pi_t^j\ \}_{t=0}^{\infty}$, путь $\{k_t^j,\ c_t^j,\ i_t^j\}$ являются последовательным с поведением хозяйства j для любого j.

(ii) $(K_t^m\ L_t^m\}$ - максимальная прибыль фирмы для любого m и t.

(iii) - рынки капитала и труда очищены в любой период.

(iv) - агрегированные дивиденды равны агрегированной прибыли.

2.2.5. Общее Равновесие: существование, уникальность и характеризация

•В последующем опишем децентрализованное равновесное размещение:

Предложение 5. Для произвольной первоначальной позиции $(k_0^j)_{j\in}$ [0,1] существует равновесие. Размещение фирм производителей неопределенной, но равновесие уникально касательно (в отношении) совокупности и размещения хозяйств. Соотношение капитал - труд представлен $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ где

$$k_{t+1} = G(k_t) \qquad (2.29)$$

для всех случаев $t \geq 0$ и $k_0 = \int k_0^j dj$ исторически дан, где $G(k) \equiv sf(k)+(1-\delta-n)k$.

Равновесие роста представлено формулой:

$$\gamma_t \equiv \frac{k_{t+1}-k_t}{k_t} = \gamma(k_t) \qquad (2.30)$$

где $\gamma(k) \equiv s\phi(k)-(\delta+n), \phi(k) \equiv f(k)/k$ (k). В конечном итоге цена равновесия представляется

$$r_t = r(k_t) = f'(k_t), \qquad (2.31)$$

$$w_t = w(k_t) = f(k_t)-f'(k_t)k_t, \qquad (2.32)$$

где $r'(k) < 0 < w'(k)$.

Доказательство. Сначала охарактеризуем равновесие, допуская, что оно существует. Используя $K_t^m = X_t L_t^m$ (2.24), сможем определить совокупный спрос на капитал следующим образом:

$$\int_0^{M_t} K_t^m dm = X_t \int_0^{M_t} L_t^m dm$$

Из условия уровновешивания рынка труда (2.28),

$$\int_0^{M_t} L_t^m dm = L_t$$

комбинируя, получим

$$\int_0^{M_t} K_t^m = dmX_t L_t,$$

Замещая условие уровновешивания рынка (2.27), делаем вывод:

$$X_t L_t = K_t$$

где $K_t \equiv \int_0^{L_t} k_t^j dj$ обозначает накопленный капитал. Равнозначно,тождество $k_t \equiv K_t/L_t$ обозначает соотношение капитал-труд, имеем

$$X_t = k_t. \qquad (2.33)$$

Это значит, что все фирмы используют некоторое соотношение капитал-труд, как накопление.

Переставляя (2.33) в (2.22) и (2.23) придем к выводу, что цена равновесия представляется

$$\begin{aligned} r_t &= r(k_t) \equiv f'(k_t) = F_K(k_t, 1) \\ w_t &= w(k_t) \equiv f(k_t) - f'(k_t)k_t = F_L(k_t, 1) \end{aligned}$$

Отметим, что $r'(k] = f''(k) = F_{KK} < 0$ и $w'(k] = -f''(k)k. = F_{LK} > 0$. Это значит, что норма прибыли - убывающая функция соотношения капитал-труд, а норма зарплаты - растущая функция соотношения капитал-труд. Первое свойство отражает сокращение возврата (оборота), второе - дополняемость капитала и труда.

Дополняя напряженный бюджет хозяйства, получим

$$C_t + I_t = r_t K_t + w_t L_t + \int \pi_t^j dj$$

где $C_t \equiv \int c_t^j dj$ и $I_t \equiv \int i_t^j dj$

Накопленные дивиденды должны быть равны накопленной прибыли, $\int \pi_t^j dj = \int \Pi_t^m dj$. При условии (2.26), прибыль для каждой фирмы равна нулю.

Поэтому $\int \pi_t^j dj = 0$, подразумевая

$$C_t + I_t = Y_t = r_t K_t + w_t L_t$$

Равнозначно, в случае на душу населения,

$$c_t + i_t = yt = r_t k_t + w$$

Из (2.25) и (2.33), или равнозначно из (2.31) и (2.32)

$$r_t k_t + w_t = y_t = f(k_t)$$

Бюджет хозяйства предполагает

$$c_t + i_t = f(k_t)$$

который является простым ограничением ресурсов в экономике.

Добавляя правило индивидуального накопления (2.16), получим правило накопления капитала в целом в экономике. В условиях на душу населения,

$$k_{t+1} = (1 - б - n)k_t + i_t$$

Дополняя (2.19) по хозяйствам, также придем к выводу

$$i_t = sy_t = sf(k_t)$$

Сочетая, придем к заключению

$$K_{t+l} = sf(k_t) + (l\text{-}б\text{-} n)k_t = G(k_t)$$

что аналогично с централизованным распределением ресурсов.

В конечном итоге, существование и уникальность теперь тривиальны. (2.29) показывает, что любое $k_t \in (0,\infty)$ приводит к уникальному $k_{t+1} \in (0,\infty)$. Также (2.31) и (2.32) приводит любого $k_t \in (0,\infty)$ к уникальному $r_t, w_t \in (0, \infty)$. Поэтому любому первоначальному $k_0 = \int k_0^j dj$, существует соответствующее уникальное значение $\{k_t\}_{t=0}^{\infty}$ и $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$. Даны $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ с распределением $\{k_t^j, c_t^j, i_t^j\}$ для произвольного хозяйства j его уникальность определяется по (2.16), (2.17), и (2.19). Итак, любое распределение ресурсов $\{K_t^m, L_t^m\}_{m\in[0,M_t]}$

производства в разрезе фирм в периоде t является равновесным пока выполняется равенство $K_t^m = k_t L_t^m$.

• Непосредственное применение равновесия как в децентрализованной, так и централизованной экономике является изоморфическим.

Предположение 6. Совокупное и подушевое распределение в конкурентной рыночной среде совпадает с распределением в плановой экономике.

Доказательство. Исходя из того, что G имеет одинаковое значение для обоих режимов и обеспечивается одинаково (s, δ, n, f).

Исходя из изоморфности, можем непосредственно перенести устойчивое состояние и динамику перехода централизованной плановой экономики в устойчивое состояние и в динамику перехода в децентрализованное рыночное распределение.

Заключение 7. Допустим $\delta + n \in (0,1)$ и $s \in (0,1)$. Устойчивое состояние $(c^*, k^*) \in (0, \infty)^2$ в конурентной экономике существует и уникально, и совпадает с показателями плановой экономики. *k^{*D} и y^{*a} увеличивается с ростом s и уменьшается с ростом δ и n, так как c^{*D} не монотонен с ростом s и уменьшается с увеличением δ и n. Итак, $y^*/k^{*\circ} = (\delta + n)/s$.*

Заключение 8. *Дано некоторое первоначальное* $k_0 \in (0, \infty)$, конкурентная экономика ассимтотически приближается к устойчивому состоянию. Динамика перехода монотонна. Равновесный темп роста позитивен и с истечением времени понижается, стремясь к нулю при условии $k_0 < k^*$; *негативен и с истечением времени увеливается, стремясь к нулю при условии $k_0 > k^*$.*

2.3 Шок – как результат изменения условий

Модель Солоу может быть также интерпретирована, как примитивная модель реального экономического цикла (RBC – РЭЦ). Можно использовать эту модель для предсказания реакции экономики на нарушения производительности или резкого роста экономических экспериментов, а также шоков, вызванных некоторыми правительственными решениями.

2.3.1. Шок по производительности и экспериментальный шок

- Производственный шок. Рассмотрим позитивный или негативный производственный шок, либо постоянный, либо переменный. Функция $\gamma(k)$ перемещается вверх (вниз) либо постоянно или переменно. Какой эффект оказывает производственный шок на устойчивое состояние и на динамику перехода в этих случаях?

- Экспериментальный шок. Рассмотрим временный спад нормы сбережений. Функция γ (k) временно перемещается вниз, затем возвращается в свою первоначальную позицию. Как выглядит динамика перехода.

2.3.2 Непродуктивные государственные расходы

- Рассмотрим роль государства в конкурентной рыночной экономике. Государство тратит ресурсы без внесения вклада в воспроизводство или в капитальные накопления.

- Ограничение ресурсов выглядит

$$c_t + g_t + i_t = y_t = f(k_t)$$

где g_t означает государственные потребления. Из этого вытекает, что динамика капитала выглядит

$$k_{t+1} - k_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t - c_t - g_t$$

• Государственные расходы финансируются пропорционально налогообложению доходов по норме $\tau \geq 0$. Государство поглащает долю m от совокупного продукта:

$$g_t = \tau y_t$$

• Располагаемый доход хозяйствующего субъекта равен $(1-\tau)y_t$. Продолжаем предполагать, что потребление и инвестиции поглощают долю 1- s и s от располагаемого дохода:

$$c_t = (1-s)(1-\tau)y_t$$

• Комбинируя, приходим к заключению, что динамика капитала представляется уравнением:

$$\gamma_t = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = s(1-\tau)\phi(k_t) - (\delta + n)$$

где $\phi(k)/k$. Даны s и k_t, темп роста γ_t падает с ростом τ.

• Устойчивое состояние существует для $\tau \in [0,1]$ и представлен

$$k^* = \phi^{-1}\left(\frac{\delta + n}{s(1-\tau)}\right).$$

S представлен k^* уменьшается с ростом τ.

• Шоковая политика. Рассмотрим временный шок государственного потребления. Как будет изменяется динамика перехода?

2.3.3. Продуктивные государственные расходы

Предположим, производство представляется уравнением

$$y_{tt} = f(k_t, g_t) = k_t^{\alpha} g_t^{\beta}$$

где $a > 0$, $\beta > 0$, и $a + \beta < 1$. Государственные расходы объясняются как инфраструктура или другие продуктивные услуги. Ресурсные ограничения выглядят $c_t + g_t + i_t = y_t = f(k_t, g_t)$

Продолжаем предполагать, что государственные расходы финансируются пропорционально налогообложенного по норме τ, и что частное потребление и инвестиции составляют долю 1 - s и s от располагаемого дохода хозяйства:

$$g_t = \tau y_t$$

$$c_t = (1-s)(1-\tau)y_t$$

$$i_t = s(1-\tau)y_t$$

• Замещая $g_t = \tau\ y_t$ вместо $y_t = k_t^{\alpha} g_t^{\beta}$ и вычисляя y_t, приходим к заключению

$$y_t = k_t^{\frac{\alpha}{1-\beta}} \tau^{\frac{\beta}{1-\beta}} \equiv k_t^{a} \tau^{b}$$

где $a \equiv \alpha/1\text{-}\beta)$ и $b \equiv \beta(1\text{-}\beta)$. Заметим, что $a > \alpha$, что отражает дополняемость между государственными расходами и капиталом.

• Приходим к выводу, что темп роста представляется уравнением

$$\gamma_t = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = s(1-\tau)\tau^{b} k_t^{a-1} - (\delta + n).$$

При этом устойчивое состояние равняется

$$k^{*} = \left(\frac{s(1-\tau)\tau^{b}}{\delta + n} \right)^{1/(1-a)}$$

Рассмотрим, как норма τ максимилизирует либо k^{*}, или γ_t для любого k_t. Это представляется следующим

$$\frac{d}{d_{\tau}}\left[(1-\tau)\tau^{b}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$b\tau^{b-1} - (1+b)\tau^{b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tau = b/(1+b) = \beta.$$

что означает; “оптимальное” τ равен соотношению эластичности производства к государственным услугам. Чем больше продуктивность государственных услуг, тем выше их позиция.

2.4. Непрерыввность времени и условная конвергенция

2.4.1. Модель Солоу в условиях непрерывности времени

- Вспомним, что базовое уравнение роста модели Солоу в дискретном времени имеет вид

$$\frac{k_{t+1}-k_t}{k_t}=\gamma(k_t)\equiv s\phi(k_t)-(\delta+n)$$

Предположим, что похожие условия сохраняются при непрерывности времени. Убедимся в этом ниже.

- Ресурсные ограничения экономики выглядят, как

$$C+I=Y=F(K,L)$$

В случае на душу населения,

$$c+i=y=f(k)$$

Прирост населения представлен соотношением

$$\frac{\dot{L}}{L}=n$$

и закон движения совокупного капитала

$$\dot{K}=I-\delta K$$

Допустим, $k=K/L$. Тогда

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{K}}{K}-\frac{\dot{L}}{L}$$

Проводя перестановки, выводим

$$\dot{k} = i-(\delta+n)k.$$

Сочетая это с

$$i = sy = sf(k)$$

приходим к заключению

$$\dot{k} = sf(k)-(\delta+n)k.$$

- Равнозначно, что темп экономического роста представляется:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \gamma(k) \equiv s\phi(k)-(\delta+n). \qquad (2.34)$$

Функция $\gamma(k)$ означает темп роста по модели Солоу, где время либо дискретно или непрерывно.

Таблица 2

Приближение к устойчивости

Годы	Присвоение	$y=\sqrt{k}$	s=0.3	δ=0.1	k=4.0	
	k	y	c	i	δk	Δk
1	4.000	2.000	1.400	0.600	0.400	0.200
2	4.200	2.049	1.435	0.615	0.420	0.195
3	4.395	2.096	1.467	0.629	0.440	0.189
4	4.584	2.141	1.499	0.642	0.458	0.184
5	4.768	2.184	1.529	0.655	0.477	0.178
...						
10	5.602	2.367	1.657	0.710	0.560	0.150
...						
25	7.321	2.706	1.894	0.812	0.732	0.080
...						
100	8.962	2.994	2.096	0.898	0.896	0.002
...						
∞	9.000	3.000	2.100	0.900	0.900	0.000

2.4.2 Логарифмо – линеаризация и степень конвергенции

- Установим, что $z \equiv \ln k - \ln k^*$. Можно переписать уравнение роста (2.34) в виде

$$\dot{z} = \tilde{A}(z)$$

где $$\Gamma(z) \equiv \gamma(k^* e^z) \equiv s\phi(k)-(\delta+n).$$

Отметим, что $\Gamma(z)$ определено для всех $z \in$ R. По определении k^*, $\Gamma(0) = s\phi(k^8) - (\delta + n) = 0$. Аналогично, $\Gamma(z) > 0$ для всех $z < 0$ и $\Gamma(z) < 0$ для всех $z > 0$. Итак, $\Gamma'(z) = s\o'(k^*e^z)k^*e^z < 0$ для всех $z \in$ R.

- Далее (логарифмируя) линеаризуя $z = \Gamma(z)$ в области $z = 0$:

$$z = \Gamma(0) + \Gamma'(0) \bullet z$$

или равнозначно

$$z^{\cdot} = \lambda z$$

переставляя $\Gamma(0) = 0$ и допуская $\lambda = \Gamma'(0)$.

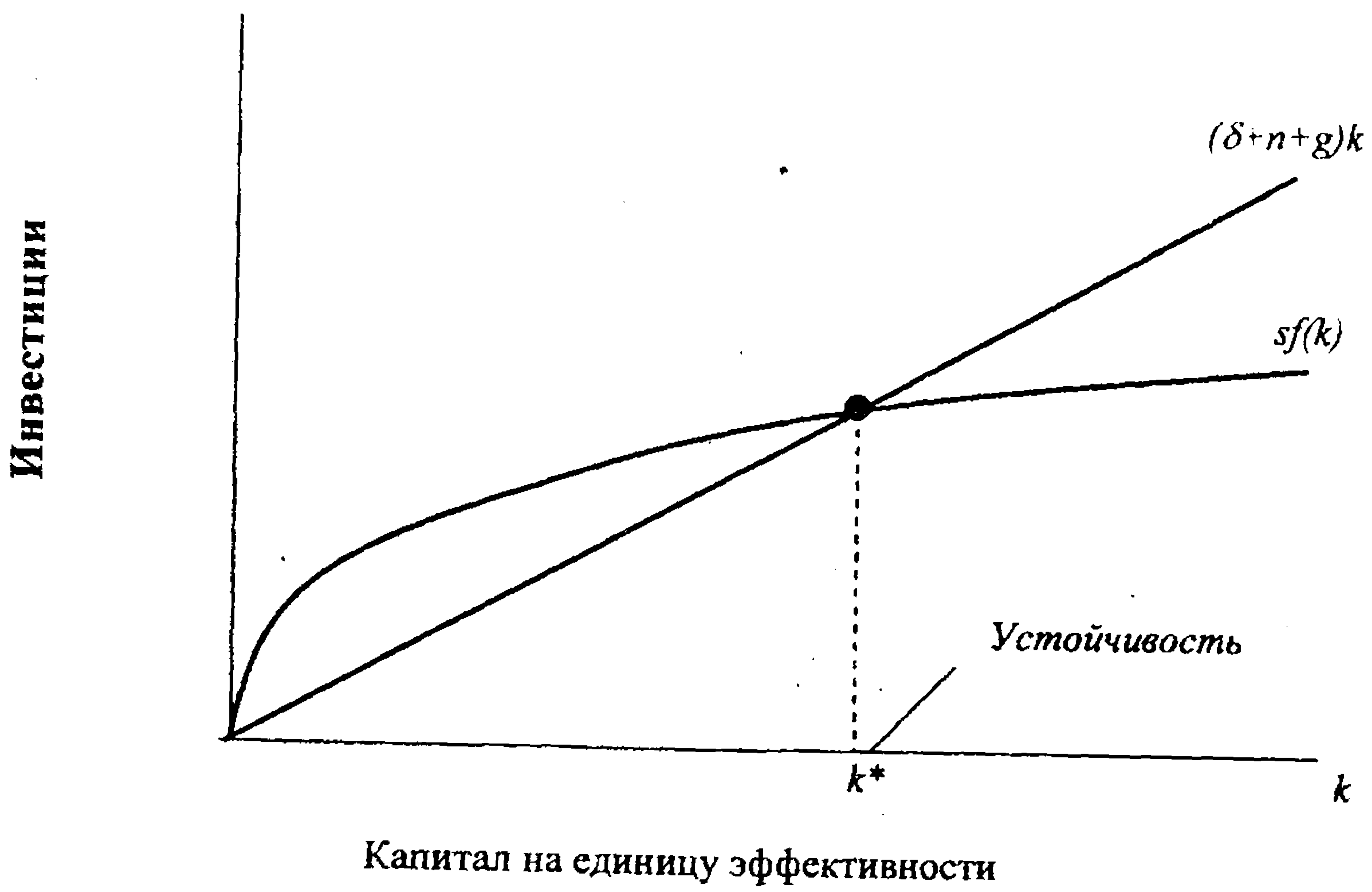


Рис. 10. Технологический прогресс

- Путем простых алгебраических расчетов получим:

$$\tilde{A}'(z) = s\phi'(k^* e^z)k^* e^z \prec 0$$

$$\phi'(k) = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\left[1 - \frac{f'(k)k}{f(k)}\right]\frac{f(k)}{k^2}$$

$$sf(k^*) = (\delta + n)k^*$$

получаем

$$\tilde{A}'(0) = -(1-\varepsilon_K)(\delta+n) \prec 0$$

где $\varepsilon_K \equiv F_K \;\; K/F \;=\; f'(k)k/f(k)$ есть эластичность производства в соотношении с капиталом, вычисленным в точке устойчивого состояния k.

Выводим, что

$$\frac{\dot{k}}{k} = \lambda \ln\left(\frac{k}{k^*}\right)$$

где

$$\lambda = -(1-\varepsilon_K)(\delta+n) \prec 0$$

величина - λ называется степенью конвергенции.

- Отметим, что в области устойчивого состояния

и $$\frac{\dot{y}}{y} = \varepsilon_k \cdot \frac{\dot{k}}{k}$$

$$\frac{y}{y^8} = \varepsilon_k \cdot \frac{k}{k^8}$$

Из этого следует

$$\frac{\dot{y}}{y} = \lambda \ln\left(\frac{y}{y^*}\right)$$

где λ – степень конвергенции либо для капитала или продукции.

- По модели Кобба-Дугласа, $y = k^a$, и степень конвергенции представляется

$$-\lambda = (1 - \lambda)(\delta + n)$$

где *a* доля прибыли капитала. Заметим, что пока $\lambda \longrightarrow 0 \;\; \lambda \longrightarrow 0$. Это означает, что конвергенция становится все медленнее и медленнее, тогда как доля дохода капитала становится ближе и ближе к 1. В действительности, если бы λ=1, экономика росла бы по сбалансированной линии роста.

- Например, с продуктивными государственными расходами,

$$y = k^{\alpha} g^{\beta} = k^{\alpha/(1-\beta)} \tau^{\beta/(1-\beta)}$$

получаем

$$-\lambda = \left(1 - \frac{\alpha}{1-\beta}\right)\delta + n$$

Степень конвергенции понижается с ростом продуктивности государственных услуг – β и λ → 0, в то время как β → 1 - λ.

• Проверка: если λ = 35%, *n* = 3% (1% прирост населения, 12% экзогенный технологический прогресс), и *б* = 5%, тогда λ = 6%. Это противоречит фактическим данным. Но если λ = 70%, когда – λ = 2.4%, это совпадает с фактическими данными.

2.5. Межстрановая разница и условная конвергенция

2.5.1. Межстрановая разница по Менкю-Ромер-Вийл

Модель Солоу подразумевает, что устойчивое состояние капитала, производительности и дохода определятся в основном технологией (f и δ), нормой национального сбережения *(s)*, ростом населения (n).

• Допустим, что страны располагают одинаковой технологией в долгосрочном периоде, но различаются в характере сбережений и в уровне рождаемости. Если модель Солоу верна, то наблюдаемая разница в доходах и производительности объянялась бы наблюдением межстрановой разницы между s и n.

• Менкю, Ромер, Вийл исследовали эту гипотезу на фактических данных. В своей простой форме, модель Солоу не может объяснить широкую межстрановую дисперцию дохода и уровня производительности.

• Менкю, Ромер и Вийл затем рассмотрели расширенную модель Солоу, которая включает два типа капитала: физический капитал *(k)* (материальные активы) и человеческий капитал *(h)*. При этом производство выглядит как

$$y = k^{\alpha} h^{\beta}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, и $a + \beta < 1$.

Динамика накопления капитала представляется

$$k = s_k y - (\delta + n)k$$

$$h = s_h y - (\delta + n)h$$

где s_k и s_h являются уровнем инвестиций в физический и человеческий капитал соответственно. Уровень устойчивого состояния *k, h,* и *y* зависит от s_k. и s_h, также δ и *n*.

• Применив s_h как уровень образования в каждой стране, Менкю, Ромер, Вийл пришли к мнению, что расширенная модель Солоу дает хорошее объяснение межстрановой дисперции уровня производства и производительности.

2.5.2. Условная конвергенция по Барроу

• Вспомним, что логарифмо – линеаризация динамика в области устойчивого состояния выглядит

$$\frac{y}{y} = \lambda ln \frac{y}{y^*}$$

Такая же связь будет сохранятся и в неоклассической моделе роста Рамзей-Касс-Купменса. $\lambda < 0$ отражает снижение дохода по странам. Такое снижение дохода по странам происходит также в эндогенных моделях роста. Это выходит за пределы обычной (простой) модели Солоу.

• Перепишем это уравнение как

$$\Delta \ln y - \lambda \ln y - \lambda \ln y^*$$

далее, приняв X, который включает $s, б, n, \tau$ и.т.д, определим устойчивое состояние производства в группе специфических стран. Это даст нам

$$-\lambda \ln y^* \approx \beta'' X$$

придем к выводу

$$\Delta Iny = \lambda Iny + \beta' X + error$$

Это демонстрирует типичную регрессию условной – конвергенции по Барроу: используем данные по странам для вычисления λ (степени конвергенцииthe), вместе с β (эффект от нормы сбережений, образования, рост населения, политики, и.т.д) Годовая расчётная степень конвергенции около 2%.

- Обсудим эффект других переменных *(X)*.

2.6. Многообразность

2.6.1. Золотое правило и динамичная неэффективность

- Золотое правило: Потребление в точке устойчивости представлено как:

$$c^* = (1 - s)f(k^*) =$$

$$= f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

Допустим (социальный) планировщик выбирает s для того, чтобы максимизировать с*. Так как k^* является монотонной функцией от s, то выбор k^* равнозначно максилизации c^*. Отметим, что

$$c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$$

строго вогнутый в k^*. Условие первого порядка является и необходимым и достаточным. Поэтому c^* достигает максимального значения только и только $k^* = k_{gold}$, где k_{gold} определяется

$$f'(k_{gold}) - \delta = n.$$

Равнозначно, $s = s_{gold}$, где s_{gold} определяется

$$s_{gold} \cdot \phi(k_{gold}) = (\delta + n)$$

Это называется “золотым правилом” сбережений по Филипсу.

• Динамическая неэффективность: если $s \succ s_{gold}$ (равнозначно, $k^{*} > k_{gold}$), экономика в состоянии динамической неэффективности: если рост сбережний будет снижаться к $s = s_{gold}$ для всех t, тогда потребление во всех периодах будет выше.

• С другой стороны, если $s < s_{gold}$ (равнозначно, $k^{*} > k_{gold}$), то увеличивание нормы s в сторону s_{gold} приведет к повышению потребления в долгосрочном периоде, но это происходит за счёт уменьшения потребления в краткосрочном периоде. Будет ли желанным перестановка между долго и краткосрочным потреблением, зависит от того, как социальный планировщик оценит (взвесит) краткосрочное потребление против долгосрочного.

• Модифицированное золотое правило: в модели Рамсея такая перестановка решится, если k* удостоверяет

$$f'(k^{*}) - \delta = n + p$$

где $p > 0$ measures impatience (p будет называться “уровень погрешности”). Выше приведенное будет называться “модифицированное золотое правило”. Соответстсвенно, расстояние между Рамсей – оптимальный k^{*} и согласно золотому правилу k_{gold} будет увеличиваться с ростом p.

• Абел и другие отмечают, что золотое правило может быть представлено, как

$$r - \delta = \frac{\dot{Y}}{Y}$$

Динамичная неэффективность имеет место, если $r - \delta < \dot{Y}/Y$. Динамичная эффективность гарантирована если $r - \delta > \dot{Y}/Y$. Абел и другие используют эту связь для того, чтобы аргументировать, что в реальности нет динамичной неэффективности.

- Искусственное раздувание экономического подъема. Если экономика в состоянии динамической неэффективности, то это пространство для искусственного раздувания экономического подъема.

2.6.2. Уровни бедности, циклы и.т.д.

- Обсуждение общего невогнутого или немонотонного: стабильное против нестабильного; уровни ловушки бедности.

- Местная стабильность напротив глобальной, степень местной конвергенции.

- Колеблящаяся динамика; непрерывные циклы.

2.6.3 Представление эндогенного роста

- Приближение темпов роста к 0 по модели Солоу (также по Рамсей) доказывает исчезновение предельной продуктивности капитала, это и есть условие Инады $lim_{k \to \infty} f'(k) = 0$.

- Продолжая предположение, что $f''(k) < 0$, в то время, когда $\gamma(k) < 0$, но допуская, что $lim_{k \to \infty}$ $f(k)$ $A > 0$. Это означает также, что $lim_{k \to \infty} \phi(k) = A$. Когда $k \to \infty$,

$$\gamma_t \equiv \frac{k_{t+1} - k_t}{t} \to sA - (n + \delta)$$

- Если $sA < (n + \delta)$, тогда как и раньше: экономика приближается к такому состоянию к k^*, когда $\gamma(k^*)=0$. Но если $sA > (n + x + \delta)$, в экономике будет наблюдаться спад, но рост не исчезнет: γ_t будет падать с ростом t, однако, когда $\gamma_t \to sA - (n+\delta) > 0$, $t \to \infty$.

• Жонес и Мануели рассмотрели подобную общую технологию выпуклости: например, $f(k) = Bk^a + Ak$. Получим динамику перехода в краткосрочном и непрерывный рост в долгосрочном периоде

• В случае, когда $f(k) = Ak$, экономика с самого начала следует линии сбалансированного роста.

• Под A будем подразумевать внутренний фактор, с точки зрения политики, институтов, рынков и других. Например, Ромер и Ликас пишут: если имеется человеческий капитал или побочный эффект: $y = Ak^{\alpha}h^{1-\alpha}$

и $h = k$, то получим $y = Ak$.

• Консолидирование условной конвергенции с внутренним ростом. Думая о том, что $\ln k - \ln k^*$ как непрямое измерение устойчивого распределения ресурсов (человеческого капитала против физического, структурная специализация); или как измерение величины технологической границы и.т.д.

Выводы по II главе

Вторая глава «Модель роста Солоу (или взгляд вперед)» состоит из 6 параграфов и 22 подпараграфов, в которых подробно раскрыты централизованное и рыночное распределение ресурсов на примерах таких хозяйствующих субъектов, как хозяйства, фирмы. Также через призму анализа государственных и негосударственных расходов раскрыты условия общего рыночного равновесия. Раскрыта сущность модели Солоу в условиях непрерывности времени. Заслуживает особое внимание золотое правило сбережений по Филлипсу, в которой раскрыт вопрос снижения сбережений следствием, которого служит повышение потребления во всех периодах.

Рекомендуемые сайты

1. www.cepa.newschool.edu
2. www.nobelprize.org
3. www.fgn.unisg.ch
4. www.eumed.net
5. www.digitaleconomist.com
6. www.minneapolisfed.org
7. www.samvak.tripod.com

Список использованной литературы

Weil P. “Precautionary Savings and the Permanent Income Hypothesis”. Review of Economic Studies 60, no 2 (April 1993): 367-383

Barro R.J. Determinants of Economic Growth: A Cross-Country Empirical Study. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1997

Barro R.J. “Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth”. Journal of Political Economy 98, no.5, pt.2 (October 1990): S103-S125

Solow R.M. “A Contribution to the Theory of Economic Growth”. Quarterly Journal of Economics 70, no 1 (1956): 65-94

Stokey N.L. and R.E. Lucas, Jr.Recursive Methods in Economic Dynamics. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1989, chap.2

Вопросы для обсуждения и контроля

1. Проведите анализ модели Солоу
2. Объясните условие Инады. Производственная функция (кривая)
3. Технология в интенсивной форме (метод Кобба-Дугласа)
4. Норма сбережения и Золотое правило, Устойчивость капитала

5. Закон движения капитала – математическая и графическая интерпретация
6. Приведите и охарактеризуйте уравнение накопленного капитала
7. Представьте траекторию динамики развития экономики
8. Что подразумевается под определением «устойчивое состояние экономики»
9. Какой характер носит динамика хозяйства в плане инвестиций и потребления
10. В чем заинтересованы фирмы, и какие условия требуют для внутреннего решения
11. Приведите определение общего рыночного равновесия
12. Краткое описание о децентрализованном равновесном размещении
13. Золотое правило и динамическая неэффективность

ГЛАВА 3. НЕОКЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

• В моделе Солоу агент экономики следует простому линейному правилу для потребления и инвестиций. В модели Рамсея агент выбирает потребление и инвестиции так, чтобы максимизировать личную пользу (или социальное благосостояние).

3.1. Социальный планирующий

• В этом разделе проанализируем неоклассическую модель роста, предполагая оптимальность плана доброжелательного социального планирующего, чей выбор устойчивое и межвременное размещение ресурсов с целью максимизации социального благосостояния. Позже покажем преимущество размещения ресурсов в децентрализованной конкурентной рыночной среде, совпадающей с размещением при социальном планирующем.

• Вместе с потреблением и сбережением, также рассмотрим внутреннее предложение труда как эндогенный фактор.

3.1.1. Предпочтение

• Предпочтение определяется избыточным потоком потребления и досуга $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, где $x_t = (ct,\ z_t)$, и представлено функцией полезности, $U : X^{\infty} \to R$, где X является областью x_t, так как

$$U(\{x_t\}_{t=0}^{\infty}) = U(x_0, x_1, ...)$$

• Предпочтения рекурсивны, если они являются функцией W : X x R→ R, так как, для всех $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$,

$$U(x_0, x_1 ...) = W[x_0, U(x_1, x_2, ...)]$$

• Можем представить предпочтения следующим образом: поток потребления – досуг $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ побуждает поток полезности $\{U_t\}_{t=0}^{\infty}$ т согласно последовательному повторению кривой предпочтения

$$U_t = W(x_t, U_{t+1})$$

Это означает, что полезность в периоде t представлена, как функция потребления в период t и полезности в периоде $t + 1$. W называется агрегатором полезности. В завершении, заметим, что повторения предпочтения, как отмечалось выше, своевременны и устойчивы.

- Если функция v_t: X → R соответствует тому, что

$$U\left(\{x_t\}_{t=0}^{\infty}\right) = \sum_{t=0}^{\infty} \upsilon_t x_t$$

то говорим, что предпочтение дополнительно отделяемое. Затем, интерпретируем $v_t(x_t)$ как полезность полученную в периоде 0 от потребления в периоде $t + 1$.

- Повсюду в проведенном анализе, предполагаем, что предпочтения и повторяемы и дополнительно отделяемые. Другими словами, мы принимаем, что совокупность полезности W линеарен в u_{t+1}: это есть функция $U: R \to R$ и коэффициент $\beta \in R$ таков, что $W(x, u) = U(x) + \beta u$. В рекурсивной форме, мы можем это представить, как

$$U_t = U(x_t) + \beta U_{t+1}$$

Альтернативно,

$$U_t = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\beta^r U(x_{t+r})\right)$$

- β называется фактором дисконта. Для полного определения предпочтения (это, для бесконечности сходства сумм) нам необходимо $\beta \in (-1,+1)$. Монотонность предпочтении утверждает, что $\beta > 0$. Поэтому мы ограничиваем $\beta \in (0,1)$. Ставка дисконта представлена через p таким образом, где $\beta = 1/(1+p)$.

- U иногда называется временным успехом или функцией полезности. Допустим $\bar{z} > 0$ обозначает максимальный объем времени по периодам. Соответственно допустим X = R x [0, $\bar{z}$]. В завершении убедились в том, что U является неоклассическим, в котором он удовлетворяет следующим свойствам:

1. U является продолжительным, хотя не всегда необходимым и дважды дифференциален.

2. U является резко растущим и резко вогнутым:

$$U_c(c,z) > 0 > U_{cc}(c,z)$$

$$U_z(c,z) > 0 > U_{zz}(c,z)$$

$$U_{cz}^2 < U_{cc}U_{zz}$$

3. U удовлетворяет условиям Инады:

$$\lim_{c \to \infty} U_c = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{c \to \infty} U_c = 0$$

$$\lim_{z \to 0} U_z = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{z \to \bar{z}} U_z = 0$$

3.1.2 Технологии и ограниченные ресурсы

- Временное ограничение представлено, как:

$$z_t + l_t \le \bar{z}.$$

Как обычно установим, что $\bar{z} = 1$ и интерпретируем z_t и l_t, как долю времени, уделенной к досугу и производству соответственно.

- Ограниченность ресурсов представлена в виде

$$c_t + i_t \le y_t$$

- Допустим $F(K,L)$ - неоклассическая технология и f(к) = F(к, 1) есть интенсивная форма от F. Производство представлено как

$$y_t = F(k_t, l_t) = l_t f(k_t),$$

где $k_t = \dfrac{k_t}{l_t}$

Капиталовооруженность рабочего места.

- Капитал накопляется в соответствии с

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t.$$

(Альтернативно, интерпретируем l как ставку эффективной заработной платы и δ как эффективную ставку обесценивания).

- Наконец, вводим следующее естественное, не негативное ограничения:

$$c_t \geq 0, \quad z_t \geq 0, \quad l_t \geq 0, \quad k_t \geq 0.$$

- Сочетая, можем переписать ограниченность ресурсов, как

$$c_t + k_{t+1} \leq F(k_t, l_t) + (1-\delta)k_t,$$

и ограниченность времени, как: $z_t = 1 - l_t$,

Соответственно, $c_t \geq 0$, $l_t \in [0,1]$, $k_t \geq 0$.

3.1.3 Проблема Рамсея

- Социальный планировщик выбирает план $\{c_t, l_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ с целью максимизации выгоды субъекта при ограниченности ресурсов в экономике, принимая первоначальное k_0, как представленный:

$$\max U_0 = \sum_{t=0}^{\infty} (\beta^t U(c_t, 1-l_t)$$

$$c_t + k_{t+1} \leq (1-\delta)k_t + F(k_t, l_t), \forall t \geq 0,$$

$$c_t \geq 0, \quad l_t \in [0,1], \quad k_{t+1} \geq 0., \quad \forall t \geq 0,$$

что $k_0 > 0$ дано.

3.1.4 Оптимальный контроль

- Допустим μ_t обозначает множитель Лагранжа для ограниченности ресурсов. Проблема социального планирующего по Лагранжу выглядит

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, 1-l_t) + \sum_{t=0}^{\infty} (u_t [(1-\delta)k_t + F(k_t, l_t) - k_{t+1} - c_t]$$

- Установив $\lambda_t \equiv \beta^t \mu_t$ и

$$H_t \;= H(k_t, k_{t+1}, c_t, l_t, \lambda_t) \equiv$$

$$\equiv \quad U(c_t, 1-l_t) + \lambda_t\left[(1-\delta)k_t + F(k_t, l_t) - k_{t+1} - c_t\right]$$

называется Гамильтоненом проблемы.

- Можем переписать уравнение Лангранжа, как

$$L_0 = \sum_{t=0}^{\infty}(\beta^t\{U(c_t, 1-l_t) + \lambda_t[(1-\delta)k_t + F(k_t, l_t) - k_{t+1} - c_t]\} = \sum_{t=0}^{\infty}(\beta^t H_t)$$

или в рекурсивной форме

$$L_t = H_t + \beta L_{t+1}$$

- Данные k_t , c_t и l_t включают только период полезности t и ограниченности ресурсов: (c_t, l_t) появляются только в H_t. Аналогично, K_t, включает только период t и $t+1$ ограниченности ресурсов и полезности; это происходит только при H_t и H_{t+1}.

Поэтому,

Лемма 9. Если $\{c_t, l_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ является оптимизмом и $\{\lambda_t\}_{t=0}^{\infty}$ объединенным множителем, тогда

$$(c_t, l_t) = \arg\max_{c,t} \overbrace{H(k_t, k_{t+1}, c, l, \lambda_t)}^{H_t}$$

принимая (k_t, k_{t+1}), как представленные, и

$$k_{t+1} = \arg\max_{k'} \overbrace{H(k_t, k', c_t, l_t, \lambda_t) + \beta H(k', k_{t+2}, c_{t+1}, l_{t+1}, \lambda_{t+1})}^{H_t + \beta H_{t+1}}$$

(arg max – максимальная совокупность) принимая (k_t, k_{t+2}) , как представленные

Эквивалентно,

$$(\tilde{n}_t, l_t, k_{t+1}, c_{t+1}, l_{t+1}) = \arg\max_{c,l,k',c',l'}\left[U(c,l) + \beta U(c', l')\right]$$

$$s.t. \qquad c + k' \le (1-\delta)k_t + F(k_t, l)$$

$$c' + k_{t+2} \le (1-\delta)k' + F(k', l')$$

- С этого момента рассмотрим внутренне решение. Пока $k_t > 0$, внутреннее решение в действительности гарантировано условием Инады для F и U.

- Условие первого порядка касательно к c_t представлено

$$\frac{\partial L_0}{\partial c_t} = \beta^t \frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial c_t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$U_c(c_t, z_t) = \lambda_t$$

- Условие первого порядка касательно к l_t представлено

$$\frac{\partial L_0}{\partial l_t} = \beta^t \frac{\partial H_t}{\partial l_t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial l_t} = 0 \Leftrightarrow$$

$$U_z(c_t, z_t) = \lambda_t F_L(k_t, l_t)$$

И в завершении, условие первого порядка касательно к l_t выглядит

$$\frac{\partial L_0}{\partial k_{t+1}} = \beta^t \left[\frac{\partial H_t}{\partial k_{t+1}} + \beta \frac{\partial H_{t+1}}{\partial k_{t+1}}\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\lambda_t + \beta \frac{\partial H_{t+1}}{\partial k_{t+1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_t = \beta\left[1 - \delta + F_K(k_{t+1}, l_{t+1})\right]\lambda_{t+1}$$

Сочетая, получим

$$\frac{U_z(c_t, z_t)}{U_c(c_t, z_t)} = F_L(k_t, l_t)$$

и

$$\frac{U_c(c_t, z_t)}{\beta U_c(c_{t+1}, z_{t+1})} = 1 - \delta + F_K(k_{t+1}, l_{t+1}).$$

- Оба условия подтверждают равенство между предельной нормой трансформации. Первое условие означает, что предельная норма межвременного замещения в потреблении равны предельному норму капитала за вычетом обесценивания (плюс один). Это последнее условие называется условием Эйлера.

• Условие конверта для проблемы Парето является

$$\frac{\partial(\max U_0)}{\partial k_0} = \frac{\partial L_0}{\partial k_0} = \lambda_0 = U_c(c_0, z_0)$$

Более обобщенно,

$$\lambda_t = U_c(c_t, l_t)$$

представляет предельную полезность капитала в период t и будет равен уклону функции стоимости в состоянии, когда $k = k_t$ в динамико-программном представлении проблемы.

• Представим на время, что горизонт является конечным, где $T < \infty$. Тогда, согласно Лагранжу,

$$L_0 = \sum_{t=0}^{T} \beta^t H_t$$

и условие Кун-Тукера по отношению к K_{T+1} даст нам

$$\frac{\partial L}{\partial k_{T+1}} = \beta^T \frac{\partial H_T}{\partial k_{T+1}} \geq 0$$

и $k_{T+1} \geq 0$, с дополнительным бездействием это равнозначно

$$\mu_T = \beta^T \lambda_T \geq 0 \quad \text{и} \qquad k_{T+1} \geq 0, \ \text{с} \quad \beta^T \lambda_T k_{T+1} = 0.$$

Последнее означает, что либо $k_{T+1} = 0$ или иначе если теневая стоимость k_{T+1} равен нулю, тогда горизонт в условии пересекаемости

$$\lim_{t\to\infty} \beta^T \lambda_t k_{t+1} = 0.$$

Эквивалентно, принимая $\lambda_t = U_c(c_t, z_t)$, запишем условие пересекаемости, как

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t U_c(c_t, z_t) k_{t+1} = 0.$$

Вышеприведенное означает, что с истечением времени (дисконтная) теневая стоимость капитала приближается к нулю.

• Следовательно:

Предположение 10. План $\{c_t, l_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ является решением проблемы социального планирующего если и только если

$$\frac{U_z(c_t, z_t)}{U_c(c_t, z_t)} = F_L(k_t, l_t), \qquad (3.1)$$

$$\frac{U_c(c_t z_t)}{\beta U_c(c_{t+1}, z_{t+1})} = 1 - \delta + F_K(k_{t+1}, l_{t+1}) \qquad (3.2)$$

$$k_{t+1} = F(k_t, l_t) + (1-\delta)k_t - c_t, \qquad (3.3)$$

для всех случаев, когда $t \geq 0$, когда дано $k_0 > 0$, и

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t U_c(c_t, z_t) k_{t+1} = 0. \qquad (3.4)$$

- Примечание: доказана необходимость уравнений (3.1) и (3.2) в сущности при аргументе пертурбации и уравнение (3.3) является тривиальной. Не доказаны необходимость и достаточность (3.4), ни тот, ни другой из этого набора условий. Одно можно доказать необходимость и достаточность использования оптимально-контрольной техники. Альтернативно можем использовать динамическое программирование; доказательство необходимости и достаточности условий Эйлера и пересекаемости предоставлено в работах Стокей и Лукаса.
- Заметим, что (3.1) может быть решен. Докажем это позже.

3.1.5 Динамическое программирование

Рассмотрим вновь проблему социального планирующего.

Для каждого $k > 0$ определим

$$V(k) \equiv \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t, 1 - l_t)$$

при условии

$$c_t + k_{t+1} \leq (1-\delta)k_t + F(k_t, l_t), \forall t \geq 0,$$

$$c_t, l_t, (1 - l_t), k_{t+1} \geq 0, \forall t \geq 0,$$

равность $k_0 = k$ дана.

V называется функцией стоимости.

- Определим $\bar{k}$ при уникальном решении

$$\bar{k} = (1-\delta)\bar{k} + F(\bar{k},1)$$

и заметим, что $\bar{k}$ представляет верхнюю границу уровня капитала, который может поддерживаться в каждом устойчивом состоянии. Без серьезных потерь в общности, мы с этого времени ограничим $k_t \in [0,\bar{k}]$

• Допустим, что B будет совокупностью непрерывных и ограниченных функции $v:[o,\bar{k}] \to R$ и рассмотренное соответствие $\tau : B \to B$ определяется следующим образом:

$$\tau v(k) = \max U(c,1-l) + \beta v(k')$$

$$\text{s.t.} \qquad c + k' \le (1-\delta)k + F(k,l)$$

при условии

$$k' \in [o,\bar{k}], c \in [0, F(k,1)], l \in [0,1]$$

• Условия, принятые по U и F, подразумевают, что τ является встрочно соответствующей. Отсюда вытекает, что τ имеет уникальную фиксированную точку $V = \tau V$ и это фиксированная точка дает решение проблемы социального планировщика.

Предположение 11. Уникальная точка V, который решается уравнением Белмана

$$V(k) = \max U(c, 1-l) + \beta V(k')$$

$$s.t. \qquad c + k' < (1\text{-}\delta)k + F(k,l)$$

при условии

$$k' \in [0,\bar{k}], c \in [0, F(k,1)], l \in [0,1]$$

V является непрерывным дифференцируемым и резко вогнутым. $V(k_0)$ дает решение проблемы социального планирующего.

Предположение 12. Допустим,

$$[\tilde{n}(k), l(k), G(k)] = \arg\max\{\ldots\},$$

$c(k), l(k), G(k)$ являются непрерывными; $c(k)$ и $G(k)$ является возрастающими.

План $\{c_t, l_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ является оптимальным, если и только если удовлетворяются

$$c_t = c(k_t)$$

$$l_t = l(k_t)$$

$$k_{t+1} = G(k_t)$$

с исторически данным k_0.

• Примечание: доказательство этого предположения, также как доказательство необходимости и достаточности условий Эйлера и пересекаемости, представлены в работах Стокей и Лукаса. По причине ограниченности времени, пропустим это доказательство и сконцентрируемся на характеристике оптимального плана.

• Уравнение Лагранжа для проблемы (динамического программирования) выглядит

$$L = U(c,1-l) + \beta V(k') + \lambda[(1-\delta)k + F(k,l) - k'] - k' - c$$

Условие первого порядка относительно, l и k' представлен

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Leftrightarrow U_c(c,z) = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = 0 \Leftrightarrow u_z(c,z) = \lambda F_L(k,l)$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \beta V_k(k')$$

Условие конверта выглядит

$$V_k(k) = \frac{\partial L}{\partial L} = \lambda[1-\delta + F_k(k,l)]$$

• Сочетая, заключаем

$$\frac{U_z(c_t,l_t)}{U_c(c_t,l_t)} = F_l(k_t,k_t)$$

и

$$\frac{U_c(c_t,l_t)}{U_c(c_{t+1},l_{t+1})} = \beta[1-\delta + F_K(k_{t+1},l_{t+1})]$$

где условия одинаковы, как и при оптимальном контроле. В завершении, изложим условие Эйлера альтернативно, как

$$\frac{V_k(k_t)}{V_k(k_{t+1})} = \beta[1-\delta + F_K(k_{t+1},l_{t+1})].$$

3.2. Децентрализованное конкурентное равновесие

3.2.1 Хозяйства

- Хозяйства обозначены $j \in [0, 1]$. В каждом хозяйстве по одному человеку и нет роста населения.
- Предпочтение хозяйства j представлено

$$U_0^j = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t^j, z_t^j)$$

в рекурсивной форме

$$U_t^j = U(c_t^j, z_t^j) + \beta U_{t+1}^j$$

- Ограниченность времени для хозяйства j может быть расписана, как

$$z_t^j = 1 - l_t^j$$

- Ограничение бюджета хозяйства j представляется через

$$c_t^j + i_t^j + x_t^j \le y_t^j = r_t k_t^j + R_t b_t^j + w_t l_t^j + \alpha^j \Pi_t,$$

где r_t обозначает процентная ставка капитала, w_t обозначает ставку заработной платы, R_t обозначает процентную ставку безрисковых облигаций. Хозяйство j аккумулирует капитал в соответствии с

$$k_{t+1}^j = (1-\delta)k_t^j + i_t^j$$

и накапливает акции в соответствии с

$$b_{t+1}^j = b_t^j + x_t^j$$

В равновесии, прибыль фирмы равняется 0, по причине НЭМ. Это приводит к тому, что $\Pi_t = 0$ и можем переписать бюджет хозяйства, как

$$c_t^j + k_{t+1}^j + b_{t+1}^j \le (1-\delta+r_t)k_t^j + (1+R_t)b_t^j + w_t l_t^j$$

- Естественное, на негативное ограничение

$$k_{t+1}^j \ge 0$$

установлено по отношению владения капитала, но не для продажи краткосрочными облигациями. Это значит, что хозяйства могут либо брать или давать в займы нерисковые облигации. Мы только вводим следующие естественное ограничение заимствования облигаций

$$-(1+R_{t+1})b^j_{t+1} \le (1-\delta+r_{t+1})k^j_{t+1} + \sum_{T=t+1}^{\infty}(\frac{q_r}{q_{t+1}}w_r.$$

где

$$q_t \equiv \frac{1}{(1+R_0)(1+R_1)\dots(1+R_t)} = (1+R_t)q_{t+1}.$$

Это ограничение просто требует того, что чисто дебетовая позиция хозяйства не превышала текущую стоимость дохода по труду, которая может быть достигнута при постоянной длительности.

• Заметим, что простые арбитражные операции с облигациями и капиталом подразумевают, что любое равновесие

$$R_t = r_t - \delta.$$

Это означает, что процентная ставка без рисковых облигации равна арендной ставке чистого капитала за вычетом амортизации. Если $R_t < r_t - \delta$, все индивиды будут также как в случае с краткосрочной торговлей облигациями (в зависимости от их ограничении заимствования) будут инвестировать в капитал. Если $R_t > r_t - \delta$, в капитале будут доминировать облигации и никто в экономике не будет инвестировать в капитал. В первом случае, предложения облигаций будут избыточным в совокупности ценных бумаг. Во втором случае, спрос на облигации будет избыточным, и не будет инвестиций в совокупности. Равновесие R_t и r_t должно быть отрегулировано таким образом, что бы $R_t = r_t - \delta$.

• Обеспечивая условия $R_t = r_t - \delta$, хозяйству безразлично вкладывать в капитал или облигации. Выбор портфеля между k^j_t и b^j_t является неопределенным. При этом, только общая позиция активов является скованным, $a^j_t = b^j_t + k^j_t$. Ограничения бюджета убывает до

$$c^j_t + a^j_{t+1} \le (1+R_t)a^j_t + w_t l^j_t,$$

и естественное ограничения заимствования станет $a^j_{t+1} \ge a_{t+1}$,

где $a_{t+1} \equiv -\frac{1}{q_t}\sum_{T=t+1}^{\infty} q_t w_T$

• Заметим, что $\underline{a}_t$ ограничено вдали от $-\infty$ пока q_t ограничено вдали от 0 и $\sum_{T=t}^{\infty} q_T w_T$ от $+\infty$. Если $\sum_{T=t+1}^{\infty} q_t w_t$ в любом t было бы бесконечно, то агент добился бы бесконечного потребления в каждом периоде $\tau > t+1$. Этот случай не является обеспеченным при ограничении $\sum_{t=0}^{\infty}(q_t w_t) < +\infty$.

- Дана последовательность цены $\{R_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, хозяйство j выбирает план $\{c_t^j, l_t^j, k_{t+1}^j\}_{t=0}^{\infty}$ так, чтобы максимзировать продолжителдьность жизни субъекта при его бюджетном ограничении

$$\max U_0^j = \sum_{t=0}^{\infty}(\beta^t U(c_t^j, 1-l_t^j)$$
$$\text{s.t.} \quad c_t^j + a_{t+1}^j \le (1+R_t)a_t^j + w_t l_t^j$$

при условии

$$c_t^j \ge 0, \quad l_t^j \in [0,1], \quad a_{t+1}^j \ge a_{t+1}$$

- Допустим $\mu_t^j = \beta^t \lambda_t^j$ будет множетелем Лагранжа для ограничения бюджета уравнение Лагранжа будет

$$L_0^j = \sum_{t=0}^{\infty}(\beta^t \{U(c_t^j, 1-l_t^j) + \lambda_t^j[(1+R_t)a_t^j + w_t l_t^j - a_{t+1}^j - c_t^j]\}$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t H_t^j$$

где

$$H_t^j = U(c_t^j, 1-l_t^j) + \lambda_t^j[(1+R_t)a_t^j + w_t l_t^j - a_{t+1}^j c_t^j]$$

- Условие первого порядка по отношению c_t^j дает

$$\frac{\partial L_0^j}{\partial L_t^j} = \beta^t \frac{\partial H_t^j}{\partial c_t^j} = 0 \Leftrightarrow$$

$$U_c(c_t^j, z_t^j) = \lambda_t^j$$

Условие первого порядка по отношению к l_t^j дает

$$\frac{\partial L_0^j}{\partial L_t^j} = \beta^t \frac{\partial H_t^j}{\partial L_t^j} = 0 \Leftrightarrow$$
$$U_z(c_t^j, z_t^j) = \lambda_t^j w_t$$

Сочетая, получим

$$\frac{U_z(c_t^j, z_t^j)}{U_c(c_t^j, z_t^j)} = w_t.$$

Таким образом, хозяйство уравнивает предельную норму замещения между потреблением и досугом в соотвествии с обычной ставкой заработной платы.

- Условие Кун Тукера в соотношении к a_{t+1}^j дает

$$\frac{\partial L_0^j}{\partial a_{t+1}^j} = \beta^t \left[\frac{\partial H_t^j}{\partial a_{t+1}^j} + \beta \frac{\partial H_{t+1}^j}{\partial a_{t+1}^j} \right] \leq 0 \Leftrightarrow$$

равенство только тогда, когда $a_{t+1}^j > a_{t+1}$. Дополнительное условие простое выглядит

$$\left[\lambda_t^j - \beta[1 + R_t]\lambda_{t+1}^j\right]\left[a_{t+1}^j - a_{t+1}\right] = 0.$$

- В завершении, если время ограничено, то конечными условиями будут

$$\mu_T^j \geq 0, \quad a_{T+1}^j \geq a_{T+1}, \quad \mu_T^j \left[a_{T+1}^j - a_{T+1}\right] = 0$$

где $\mu_t^j \equiv \beta^t \lambda_t^j$. Если время не ограничено, то условие пересечения выглядит

$$\lim_{t \to 0} \beta^t \lambda_t^j \left[a_{t+1}^j - a_{t+1}\right] = 0.$$

- Применяя $\lambda_t^j = U_c(c_t^j, z_t^j)$, можно переставить условия Эйлера, как

$$U_c(c_t^j, z_t^j) \geq \beta[1 + R_t]U_c(c_{t+1}^j, z_{t+1}^j),$$

с равенством только тогда, когда $a_{t+1}^j > a_{t+1}$. Это значит, пока условие заимствование не ограничено, хозяйство уравнивает свою предельную норму временного замещения с обычной выручкой капитала. С другой стороны, если ограничение заимствования связано, предельная полезность дневного потребления может превысить предельную выгоду сбережения: хозяйства хотят заимствовать, но не в состоянии сделать этого.

- Нет никакой гарантии, что условие Эйлера удовлетворит равенство для общего ограничения заимствования a_t. Например, если установим $\underline{a}_t = 0$, то ограничения заимствования будет связанными, особенно, если $\beta(1 + Rt) < 1$ и w_t меньше по сравнению с его средним значением в долгосрочном периоде. Но если $\underline{a}_t$ естественный лимит заимствования и полезность удовлетворяет условие Инада. $U_c \rightarrow \infty$ как $c \rightarrow 0$, тогда простой аргумент гарантирует, что ограничение заимствования никогда не будет связанным: предположим, что $a_{t+1} = \underline{a}_{t+1}$. Тогда $c^j_\tau = z^j_\tau = 0$ для всех $\tau > t$, подразумевает $U_c(c^j_{t+1}, z^j_{t+1}) = \infty$ и поэтому обязательно выполнение условия $U_c(c^j_t, z^j_t) < \beta[1 + R_t]U_c(c^j_t, z^j_t)$, пока не будет $c^j_t = 0$, который был бы оптимальным, если $a_t = a_t$. Поэтому пока не будет $a_0 = \underline{a}_0$, начало заимствования будет противоречить условиям Эйлера. Поэтому, $a_t > \underline{a}_t$ во всех данных и условие Эйлера удовлетворяется равенством.

• Кроме того, если ограничение заимствования никогда не связывается, повторение $\lambda^j_t = \beta[1 + R_t]\lambda^j_{t+1}$ подразумевает

$$\beta^t \lambda^j_t = q_t \lambda^j_0.$$

Поэтому можно переписать пересекаемость, как

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda^j_t a^j_{t+1} = \lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda^j_t a_{t+1} = \lambda^j_0 \lim_{t\to\infty} q_t \underline{a}_{t+1}$$

Но заметим, что $qt \frac{a}{-} t + 1 = \sum_{\tau=t}^{\infty} q_\tau w_\tau$

и $\sum_{\tau=0}^{\infty} q_\tau w_\tau \prec \infty$ подразумевают $\sum_{\tau=t}^{\infty} q_\tau w_\tau = 0$. Поэтому условие пересекаемости убывает до $\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda^j_t a^j_{t+1} = 0$

Равнозначно,

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t U_c(c^j_t z^j_t) a^j_{t+1} = 0.$$

• Это применимо для новой формулировки проблемы хозяйства в устойчивом формате (что в сущности полностью допускает рынок Арроу-Дебрея). Пока ограничение заимствования не связано и условия Инада сохраняются, можем перписать проблемы хозяйства, как

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c^j_t z^j_t)$$

так как $\quad s.t.\ \sum_{t=0}^{\infty} q_t c_t^j + \sum_{t=0}^{\infty} q_t w_t * z_t^j \le \bar{x}$

где $\quad \bar{x} \equiv q_0(1+R_0)a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} q_t w_t < \infty$

Ограничения, вытекающие из по временной интеграции бюджета для всех t > 0, называются межвременным ограничением бюджета. Заметим, что при предположении

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{t=0}^{\infty} q_t w_t < \infty,$$

который гарантирует, что набор достижимых $\{c_t^j, z_t^j\}_{t=0}^{\infty}$ является компактным. Условие первого порядка дает

$$\beta^t U_c(c_t^j z_t^j) = \mu q_t$$

$$\beta^t U_z(c_t^j z_t^j) = \mu q_t w_t$$

где $\mu > 0$ является обычным множителем Лагранжа в промежуточном бюджете. Можно проверить, совпадение этих условий с полученными раньше уравнением. В завершении - целевая функция является резко вогнутой и ограничение линейным. Поэтому условие первого порядка вместе с условием пересекаемости являются необходимым и достаточным.

- Делаем вывод:

Предположение 13. Допустим, последовательность цены $\{R_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет $R_t = r_t - \delta$ для всех $\sum_{t=0}^{\infty} q_t < \infty$, и $\sum_{t=0}^{\infty} q_t w_t < \infty$. План $\{c_t^j, l_t^j, a_t^j\}_{t=0}^{\infty}$ решения индивидуальной проблемы хозяйства если и только если

$$\frac{U_z(c_t^j, z_t^j)}{U_c(c_t^j, z_t^j)} = w_t,$$

$$\frac{U_c(c_t^j, z_t^j)}{\beta U_c(c_{t+1}^j, z_{t+1}^j)} = 1 + R_t,$$

$$c_t^j + a_{t+1}^j = (1+R_t)a_t^j + w_t l_t^j,$$

для всех $t > 0$ и $a_0^j > 0$ дан, и $\lim_{t \to \infty} \beta^t U_c(c_t^j, z_t^j) a_{t+1}^j = 0$

Дана $\{a_t^j\}_{t=0}^{\infty}$, оптимального портфеля для любого $\{k_t^j, b_t^j\}_{t=1}^{\infty}$ -

Таким образом, $k_t^j \geq 0$ и $b_t^j = a_t^j - k_t^j$.

Примечание: Для более детальной дискуссии о необходимости и достаточности условий первого порядка и пересекаемости см. Стокей и Лукас.

3.2.2 Фирмы

• Имеется произвольное количество фирм M_t в периоде t, индексированы через $m \in [0, M_t]$. Фирмы нанимают рабочую силу и покупают капитал на конкурентных рынках рабочей силы и капитала, имея доступ к одинаковым неоклассическим технологиям, и производят однородный товар, который они продают на основе конкуренции другим хозяйствам экономики.

• Допустим, K_t^m и L_t^m обозначают сумму капитала и трудовой силы, которую фирма m нанимает в периоде t. Тогда прибыль фирмы в период времени t определяется следующим образом:

$$\Pi_t^m = F(K_t^m, L_t^m) - r_t K_t^m w_t L_t^m.$$

• Фирмы стремятся к максимизации прибыли. УПП для внутренного решения требует, чтобы

$$F_K(K_t^m, L_t^m) = r_t.$$

$$F_L(K_t^m, L_t^m) = w_t.$$

Вы можете принять первое условие, как спрос фирмы на трудовую силу, и второе условие, как спрос фирмы на капитал.

• Было показано ранее по модели Солоу, что внутреннее решение проблемы фирмы существования если и только и если r_t и w_t подразумевает K_t^m / L_t^m. Это тот случай, когда если и только если некоторое $X_t \in (0, \infty)$, где

$$\begin{aligned} r_t &= f'(X_t) \\ w_t &= f(X_t) - f'(X_t)X_t \end{aligned}$$

где $f(k) = F(k, 1)$. При условии, что прибыль фирм равна 0

$$\Pi_t^m = 0$$

и условие первого порядка убывает до $K_t^m = X_t L_t^m$.

Таким образом, условие первого порядка устанавливает соотношение капитал-труд для каждой фирмы (K_t^m / L_t^m), но не размер фирмы (L_t^m). Кроме того, по причине того, что все фирмы имеют доступ к одинаковым технологиям, они используют одинаковое соотношение капитал-труд (см. предыдущий анализ модели Солоу для более детального изучения).

3.2.3. Уровновешивание рынка

- Совокупное, внутренее предложение безрисковых облигаций отсутствует, поэтому рынок ценных бумаг чист, если и только если

$$0 = \int_0^{L_t} b_t^j dj.$$

- Рынок капитала чист, если и только если

$$\int_0^{M_t} K_t^m dm = \int_0^1 k_t^j dj$$

Равнозначно,

$$\int_0^{M_t} K_t^m dm = k_t$$

где $k_t = K_t \equiv \int_0^1 k_t^j dj$ является совокупным предложением капитала на душу в экономике.

- Рынок труда, с другой стороны, очищен, если и только если

$$\int_0^{M_t} L_t^m dm = \int_0^{L_t} l_t^j dj$$

Равнозначно,

$$\int_0^{M_t} L_t^m dm = l_t$$

где $l_t = L_t \equiv \int_0^{L_t} l_t^j dj$ является совокупным по поголовным предложением рабочей силы на душу населения в экономике.

3.2.4. Общее рыночное равновесие

• Определение общего рыночного равновесия сравнительно просто и естественно:

Определение 14. Равновесие в экономике это размещение ресурсов $\left\{(c_t^j, l_t^j, k_{t+1}^j, b_{t+1}^j)_{j\in[0,L_t]}, (K_t^m, L_t^m)_{m\in[0,M_t]}\right\}_{t=0}^{\infty}$ и траектория цены $\{R_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, где *(i)*. Даны $\{R_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, траектория переменных $\left\{c_t^j, l_t^j, k_{t+1}^j, b_{t+1}^j\right\}$, которая максимизирует выгоду хозяйства j для любого j.

(ii) Даны (r_t, w_t), пара (K_t^m, L_t^m) максимизирует прибыль фирмы для любого m и t.

(iii) Рынки ценных бумаг, капитала и труда очищены в любом периоде.

• Примечание: в вышеприведенном определении не рассмотрено распределение прибыли фирм (или рынка ценных бумаг). Однако это не окажет влияние на расчет в целостность по причине того, что прибыль фирмы равна 0.

3.2.5 Общее равновесие: существование, уникальность и характеристика

• В модели Солоу, показано, что децентрализованная рыночная экономика и централизованная экономика изоморфны. Похожий результат вытекает (демонстрируется) из модели Рамсея. Следуя предположено сочетаемости первой и второй теорем фундаментального благополучия, рассмотрим в модели Рамсея:

Предположение 15. Постановка конкурентного равновесного размещения ресурсов в рыночной экономике совпадает с постановкой Парето для социального планирующего.

Доказательство. Предположим, что (а) в рыночной экономике $k_0^j + b_0^j$ равнозначно всем j; и (b) социальный планирующий отождествляет полезность по всем агентам. Для более общего случая нам необходимо расширить проблему социального планирующего с учетом неравного распределения потребления и богатства по агентам. Постановка конкурентного, равновесного размещения ресурсов совпадает с постановкой оптимального размещения Патеро, где любая разница конкурентного равновесного размещения соответствует другой системе весов Патеро в пользу социального планирующего. Пропустим детали ограничения цен. Для более подробного анализа, см. Стокей и Лукас.

а. В начале рассмотрим, как решение проблемы социального планировщика может быть рассмотрено как конкурентное равновесие. Оптимальный план социального планировщика $\{c_t, l_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ дан таким образом, что

$$\frac{U_z(c_t,1-l_t)}{U_c(c_t,1-l_t)} = F_L(k_t, l_t), \forall t \geq 0$$

$$\frac{U_c(c_t,1-l_t)}{U_c(c_{t+1},1-l_{t+1})} = \beta[1-\delta + F_K(k_{t+1}, l_{t+1})], \forall t \geq 0$$

$$c_t + k_{t+1} = (1-\delta)k_t + F(k_t, l_t), \forall t \geq 0$$

дано $k_0 > 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \beta^t U_c(c_t, 1-l_t)k_{t+1} = 0.$

Выбор траектории цены $\{R_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ таково, что

$$R_t = r_t - \delta$$

$$r_t = F_K(k_t, l_t) = f'(k_t)$$

$$w_t = F_L(k_t, l_t) = f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

где $k_t = k_t/l_t$. Тривиально эти цены гарантирует, что условие первого порядка удовлетворяются для любого хозяйства и любой фирмы, если установим $c_t^j = c_t, l_t^j = l_t$ и $K_t^m / L_t^m = k_t$ для всех j и m. Далее, нам необходимо верифицировать,, что предложенное размещение удовлетворяет бюджетные ограничения каждого хозяйства. Из ограниченности ресурсов в экономике,

$$c_t + k_{t+1} = F(k_t, l_t) + (1-\delta)k_t$$

Из (НЭМ) и (УПП) для фирм

$$F(k_t, l_t) = r_t k_t + w_t l_t$$

Сочетая, получаем $c_t + k_{t+1} = (1-\delta+r_t)k_t + w_t l_t$

Пока выполняются условия $\tilde{n}_t^j = c_t, l_t^j = l_t$ и $a_t^j = k_t^j + b_t^j = k_t$ для всех j, t и $R_t = r_t - \delta$ для всех t , приводим к тому, что

$$c_t^j + k_{t+1}^j + b_{t+1}^j = (1-\delta+r_t)k_t^j + (1+R_t)b_t^j + w_t l_t^j$$

что доказывает, что бюджетные ограничения удовлетворяются для любого j,t. Наконец, это является тривиальным к предположенному размещению очищенных рынков облигаций, капитала и труда.

в. Далее рассмотрим обратное, каким образом совпадают конкурентная модель равновесия с решением Парето. По причине того, что агенты имеют одинаковое предпочтение, сталикиваются с одинаковыми ценами, а также имеют идентичный первоначальный уровень богатства и потому решения индивидуальных проблем существенно уникально (где существенность означает уникальность по отношению c_t^j, l_t^j, и $a_t^j = k_t^j + b_t^j$, но что касается выбора портфеля между k_t^j и b_t^j остаются неопределенным) каждый из агентов выбирает одинаковое размещение: $c_t^j = c_t, l_t^j = l_t$ и $a_t^j = a_t$ для всех j, t. При применениии условии первого порядка к решению индивидуальных проблем, следует, что $\{c_t, l_t, a_t\}_{t=0}^{\infty}$ удовлетворяет:

$$\frac{U_z(c_t, 1-l_t)}{U_c(c_t, 1-l_t)} = w_t, \forall t \geq 0$$

$$\frac{U_c(c_t, 1-l_t)}{U_c(c_{t+1}, 1-l_{t+1})} = \beta[1-\delta+r_t], \forall t \geq 0$$

$$c_t + a_{t+1} = (1-\delta+r_t)a_t + w_t l_t, \forall t \geq 0$$

$$\text{дано} \quad a_0 > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} \beta^t U_c(c_t, 1-l_t)a_{t+1} = 0$$

· Из условии очистки рынка для рынков облигаций и капитала совокупное предложение ценных бумаг равняется 0 и поэтому $a_t = k_t$.

Далее, при применении условии первого порядка для фирм

$$r_t = F_K(k_t, l_t)$$

$$w_t = F_L(k_t, l_t)$$

и при неизменности эффекта масштаба

$$r_t k_t + w_t l_t = F(k_t, l_t)$$

Сочетание вышеприведенных с типичными ограничениями бюджета, даст

$$c_t + k_{t+1} = F(k_t, l_t) + (1-\delta)k_t, \forall t \geq 0$$

что упрощает ограничение ресурсов в экономике. В конце концов $a_0 = k_0$, и $\lim_{t\to\infty} \beta^t U_c(c_t, 1-l_t)a_{t+1} = 0$ с $a_{t+1} = k_{t+1}$ условие пересечения социального планирующего убывает. Это заключение доказывает, что конкурирующая равновесная модель совпадает с оптимальным планом социального планировщика. Что и следовало доказать.

Следуя этому, имеем:

Предположение 16. Равновесие всегда существует. Расположения производства по фирмам не определено и выбор портфеля для каждого хозяйства также недетерминирован, но равновесие уникально в отношении цены, совокупного размещения и распределения потребления рабочей силы и богатства по хозяйству. Если первоначальное богатство $k_0^j + b_0^j$ равна по всем агентам j, тогда $c_t^j = c_t, l_t^j = l_t$ и $k_t^j + b_t^j = k_t$ для всех j.

Дано равновесие при размещении ресурсов $\{c_t, l_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ для всех $t \geq 0$,

$$\frac{U_z(c_t, 1-l_t)}{U_c(c_t, 1-l_t)} = F_L(k_t, l_t)$$

$$\frac{U_c(c_t, 1-l_t)}{U_c(c_{t+1}, 1-l_{t+1})} = \beta\left[1-\delta+F_K(k_{t+1}, l_{t+1})\right]$$

$$k_{t+1} = F(k_t, l_t) + (1-\delta)k_t - c_t$$

дано $k_0 > 0$ и $\lim_{t\to\infty} \beta^t U_c(c_t, 1-l_t)k_{t+1} = 0$.

В завершении равновесие цены представлено

$$R_t = R(k_t) \equiv f'(k_t) - \delta$$

$$r_t = r(k_t) \equiv f'(k_t)$$

$$w_t = w(k_t) \equiv f(k_t) - f'(k_t)k_t$$

где $R'(k) = r'(k) < 0 < w'(k)$.

Доказательство. Характеристика равновесия вытекает из наших предыдущих анализов. Существование и уникальность равновесие вытекают прямо из существования и уникальности оптимума социального планирующего, представленного совпадением, конкурирующим размещением и размещением Парето. За более детальной информацией см. Стокей и Лукас. Что и следовало доказать.

3.3. Устойчивое состояние и динамика перехода

3.3.1 Устойчивое состояние

• Устойчивое состояние - это некоторая фиксированная точка $(c, l, k\}$ динамической системы. Тривиальное устойчивое состояние достигается при $c=l=k=0$. Теперь рассмотрим внутреннее устойчивое состояние.

Предположение 17. Существует некоторое устойчивое состояние $(c^*, l^*, k^*\} > 0$. Все составляющие устойчивого состояния, соотношение капитала - труд, производительность рабочей силы, соотношение продукция - капитал, соотношение потребление - капитал и ставка заработной платы, ставка капитала и процентная ставка независимы от функции полезности U и уникальным образом установлены. Исходя из технологии F, ставка обесценивания δ и ставки дискаунта . В частности, соотношения капитал - труд $\kappa^* = k^*/L$ равняется предельной продуктивности капитала за вычетом амортизации со ставкой дискаунта

$$f'(k^*) - \delta = p$$

является и убывающей функцией от $p + \delta$, где $p \equiv l/\beta - 1$.

Аналогично,

$$R^* = p, \quad r^* = p + \delta$$

$$w^* = F_L(\hat{e}^*, 1) = \frac{U_t(c^*, 1 - l^*)}{U_c(c^*, 1 - l^*)}$$

$$\frac{y^*}{l^*} = f(\hat{e}^*), \quad \frac{y^*}{k^*} = \phi(\hat{e}^*), \quad \frac{c^*}{k^*} = \frac{y^*}{k^*} - \delta,$$

где $f(\hat{e}) \equiv F(\hat{e}, 1)$ и $\phi(\hat{e}) \equiv f(\hat{e})\hat{e}$.

Доказательство. $(c^*, l^*, k^*,)$ должны решатся

$$\frac{U_z(c^*, 1-l^*)}{U_c(c^*, 1-l^*)} = F_L(k^*, l^*)$$

$$1 = \beta\left[1 - \delta + F_K(k^*, l^*)\right]$$

$$c^* = F(k^*, l^*) - \delta k^*,$$

Допустим $\kappa \equiv k/l$ обозначает соотношение капитал – труд в устойчивом состоянии. При неизменности эффекта масштаба

$$F(k,l) = lf(k)$$

$$F_K(k,l) = f'(k)$$

$$F_K(k,l) = f(k) - f'(\hat{e})\hat{e}$$

$$\frac{F(k,l)}{k} = \phi(\hat{e})$$

где $f(\kappa) = F(K, 1)$ $\phi(\kappa) = f(\kappa)/\kappa$ и тогда условия Эйлера уменьшается до

$$1 = \beta\left[1 - \delta + f'(k^*)\right]$$

Это означает, что соотношение капитал-труд установлено уникально уравнением МРК, за вычетом амортизации ставкой дискаунта $f'(k) - \delta = p$, где $p = 1/\beta - 1$ или равнозначно $\beta \equiv 1/(1+p)$. Суммарная ставка капитала и чистая ставка дохода выглядят

$$r^* = p + \delta \quad \text{и} \quad R^* = p$$

в то время как ставка заработной платы

$$w^* = F_L(k^*, 1)$$

Средняя продуктивкность труда и средняя продуктивность капитала представлены

$$\frac{y^*}{l^*} = f(k^*) \quad \text{и} \quad \frac{y^*}{k^*} = \phi(\hat{e}^*)$$

в то время как при ресурсном ограничении соотношение потребления капитала выглядит

$$\frac{c^*}{k^*} = \phi(k^*) - \delta = \frac{y^*}{k^*} - \delta.$$

В этом случае сравниваемая статистика тривиально. Что и требовалось доказать.

3.3.2 Переходная динамика

Рассматриваемое условие определяет предложение труда

$$\frac{U_z(c_t, 1 - l_t)}{U_c(c_t, 1 - l_t)} = F_L(k_t, l_t)$$

Можем решить это для l_t как функцию потребления и капитала одновременно

$$l_t = l(c_t, k_t).$$

Переставив это в условие Эйлера и ограничение ресурса, заключаем:

$$\frac{U_c(c_t, 1 - l_t(c_t, k_t))}{U_c(c_t, 1 - l(c_t k_t))} = \beta[1 - \delta + F_K(k_{t+1}, l(c_{t+1}, k_{t+1}))]$$

$$k_{t+1} = F(k_t, l(c_t, k_t)) + (1 - \delta)k_t - c_t$$

Это система двух различных уравнений первого порядка для c_t и k_t. Вместе с начальным условием (k_0 дана) и условием пересекаемости это система устанавливает траекторию $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$.

Выводы по III главе

Настоящая глава «Неоклассическая модель роста» состоит из 3 параграфов и 12 подпараграфов. В основу этой главы заложено важность технологий при ограниченности ресурсов. Проблема Рамсея, как управленческая модель раскрывает оптимальный контроль через динамическое программирование. В конечном итоге рассматривается децентрализованное конкурентное равновесие в хозяйствах и фирмах. Параграф 3.3 «Устойчивое состояние и динамика перехода» состоит из раскрытия тривиального устойчивого состояния и рассматриваемая функция полезности, как независимая величина от составляющих и представляется уникальным.

Рекомендуемые сайты

1. www.cepa.newschool.eduъ
2. www.economics.about.com
3. www.ideas.repec.org
4. www.fgn.unisg.ch
5. www.econ-www.mit.edu
6. www.ssc.upenn.edu
7. www.j-bradford-delong.net

Список использованной литературы

Abel A. and Blanchard O. "An Intertemporal Equilibrium Model of Saving and Investment". Econometrica 51, no 3 (May 1983): 675 – 692

Abel, a.b., n.g.Mankiw, l.h.Summers and R.J.Zeckhauser. "Assessing Dynamic Inefficiency: Theory and Evidence". Review of Economic Studies 56, no 1 (January 1989): 1-20

Acemoglu D., Johnson S., and J.Robinson. "The Colonial Origins of Comparative Development: An Empirical Investigation". NBER Working Paper 7771 (2000)

Lucas R.E., Jr. "Asset Prices in an Exchange Economy". Econometrica 46, no.6 (1978): 1429-1445

Sidrausky M. "Rational and Patterns of Growth in a Monetary Economy". American Economic Review 77, no 4 (1967): 534-544

Barro R.J. "The Neoclassical Approach to Fiscal Policy". In modern Business Cycle Theory. Edited by R.Barro. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1989

Вопросы для обсуждения и контроля

1. Проанализируйте неоклассическую модель роста
2. Проблема Рамсея
3. План максимизации выгоды субъекта при ограниченности ресурсов
4. Проблема социального и планирующего по Лагранжу
5. Проблема Гамильтона
6. Раскройте условия равенства между предельной нормой трансформации
7. Расскажите проблему социального планирующего и его решение
8. Уравнение Лагранжа для проблемы динамического программирования
9. Как выглядит план максимизации продолжительности жизни субъекта при бюджетном ограничении
10. Условие Кун-Тукера в уравнивании предельной нормы замещения между потреблением и досугом
11. $\frac{\partial L_0^j}{\partial a_{t+1}^j} = \beta^t \left[\frac{\partial H_t^j}{\partial a_{t+1}^j} + \beta \frac{\partial H_{t+1}^j}{\partial a_{t+1}^j} \right] \le 0 \Leftrightarrow$ расскажите условие максимизации прибыли (фирмы)
12. Что понимается под уравновешиванием рынка
13. Раскройте сущность общего рыночного равновесия
14. Уникальность и характеристика общего равновесия

ГЛОССАРИЙ

Золотое правило (golden rule) – в модели роста Солоу: норма сбережений, при которой устнавливается состояние устойчивого роста экономики с максимальным уровнем потребления на каждого работника (или максимальный уровень потребления на эффектиную единицу рабочей силы).

Критика Лукаса (Lucas critique) – утверждение о том, что традиционные методы анализа экономической политики не могут адекватно отразить влияния изменений экономической политики на ожидания населения.

Макроэконометрическая модель (macroeconometric model) – модель, позволяющая с помощью определенных показателей и статистических методов охарактеризовать экономику не только с количественной, но и с качественной стороны.

Макроэкономика (macroeconomics) – наука об экономике как едином целом.

Модель (model) – упрощенноё отражение действительности с помощью графиков и уравнений, описывающих взаимосвязи различных переменных.

Модель роста Солоу (Solow growth model) – модель, выявляющая механизм воздействия сбережений, роста населения и научно-технического прогресса на уровень жизни и его динамику.

Модель уравновешивания рынка (market-clearing model) –экономическая модель, исходящая из предположения о том, что цены свободно изменяются, уровновешивая спрос и предложение.

Национальные сбережения (national saving) – часть национального дохода за вычетом объёмов потребления и государственных закупок; сумма частных и государственных сбережений.

Неоклассическая модель инвестиций (neoclassical model of investment) – теория, согласно которой объём инвестиций зависит от масштабов отклонения предельного продукта капитала от капитальных издержек.

Непоследовательность экономической политики (time inconsistency) – стремление политических деятелей сообщать заранее о курсе экономической политики для того, чтобы повлиять на ожидания частных лиц, а затем следовать другой политике, используя сложившиеся ожидания населения.

Новая классическая экономическая школа (new classical economics) – научная школа, в которой анализ экономических колебаний основывается на предпосылках классической модели. *Сравн. Нео-кейнсианская экономическая школа.*

Остаток Солоу (Solow residual) – прирост совокупной производительности факторов производства, измеряемый как разность между показателем прироста объёма производства и проростом затрат факторов, где факторы взвешены по их долям в продукте.

Паритет покупательной способности (purchasing-power parity) – теория, согласно которой цены на различные товары во всех странах должны выравниваться, а разница в общем уровне цен отражается обменным курсом.

Потрясение, шок (shock) – резкое ихменение экономических зависимостей (например, смещение кривых совокупного спрос а или совокупного предложения) в результате внешних воздействий.

Предельный продукт капитала (marginal product of capital (MPK)) – прирост объёма производства от единицы прироста затрат капитала.

Предельный продкут труда (marginal product of labor (MRL)) – прирост объёма производства от единицы прироста затрат труда.

Производственная функция (production function) – количественная зависимость между объемом производства товаров и услуг и затратами факторов производства: например, Y=F(K,L).

Производственная функция Кобба-Дугласа (Cobb-Douglas production function) – производственная функция вида $F(K,L)=AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$, где K – капитал, L – труд, A и α – параметры.

Рабочая сила (labor force) – часть населения, включающая занятых и ищущих работу.

Равновесие (equilibrium) – состояние равновесия противоположно направленных сил, например, равенство спроса и предложения на рынке.

Сдерживающая экономическая политика (contractionary policy) – экономическая политика, направленная на сокращение размеров совокупного спроса, реального дохода и занятости. *Сравн. Стимулирующая экономическая политика.*

Совокупное предложение. Кривая совокупного предложения (aggregate supply curve) –зависимость между уровнем цен и общим количеством произведенной всеми предприятиями продукции.

Совокупный (aggregate) – рассчитанный для экономики в целом.

Совокупный спрос – внешний эффект (aggregate demand externality) – воздействие на совокупный спрос изменения цен одним предприятием.

Совокупный спрос. Кривая совокупного спроса (aggregate demand curve) – обратная зависимость между уровнем цен и размерами совокупного спроса на производственную продукцию, обусловленная взаимодействием процессов на товарном и денежном рынках.

Спад, рецессия (recession) – продолжительный период снижения реального дохода.

Средняя склонность к потреблению (average propensity to consume (APC)) – отношение объема потребления к доходу (C/Y).

Стимулирующая экономическая политика (expansionary policy) – экономическая политика, направленная на расширение совокупного спроса, рост реальных доходов и занятости. *Сравн. Частичное банковское резервирование.*

Теневая экономика (underground economy) – экономическая деятельность, скрываемая с целью уклонения от налогов или из-за ее противозаконного характера.

Теорема Эйлера (Euler`s theorem) – результат математических выкладок, позволяющий доказать, что если производственная функция характеризуется постоянством отдачи от масштаба, и если цена факторов производства равна их предельному продукту, то экономическая прибыль равна 0.

Теория реального экономического цикла (real business cycle theory) – теория, согласно которой экономические колебания возникают как следствие реальных сдвигов в экономике (например, в области техники и технологии) без участия изменений номинальных величин (таких, как предложение денег).

Устойчивое состояние (steady state) – условия, при которых значение ключевых переменных не меняется.

Экономическая прибыль (economic profit) – часть выручки, остающаяся в распоряжении владельцев предприятия после возмещения затрат всех факторов производства. *Сравн. бухгалтерская прибыль.*

Экономический цикл (business cycle) – колебания объемов производства, уровня доходов и занятости в масштабах экономики.

Эластичность (elasticity) – процентное изменение какой-либо переменной, приходящееся на один процент изменения другой переменной.

Эндогенная переменная (endogenous variable) – переменная, которая объясняется какой-либо конкретной моделью; переменная, значение которой находят в процессе решения модели. *Сравн. экзогенная переменная.*

Эффективность труда (efficiency of labor) – в модели роста Солоу: переменная, измеряющая состояние здоровья, уровень образования, квалификации и знаний рабочей силы.

Р.- — Босмага рухсат этилди.
Қоғоз бичими 60 х 84 1/16
Хажми 5,4 б.т адади 100 нусха
Баҳоси келишилган нарҳда. б. №237

Тошкент Давлат иқтисодиёт
университети босмахонаси
Ўзбекистон кўчаси 49.